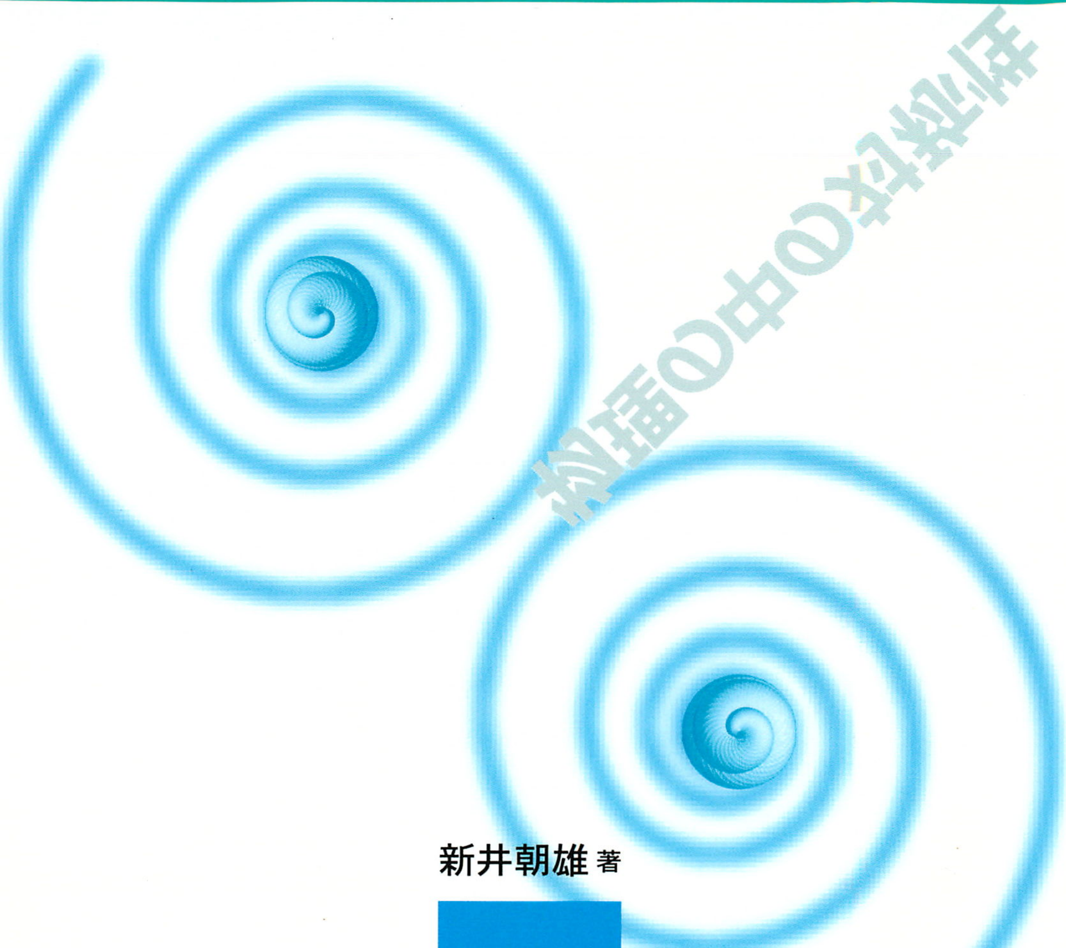
物理の中の対称性

現代数理物理学の観点から



新井朝雄 著

日本評論社

物理の中の対称性

現代数理物理学の観点から

新井朝雄 著

日本評論社

まえがき

この本は，前著『対称性の数理』(日本評論社，1993) の続編として企画されたものである．前著で示唆されたように，対称性は，物理学の諸領域の根底を貫く普遍的で根源的な理念の一つである．本書の主な目的は，前著よりも高い数学的水準において，物理学における対称性の在り方ないし構造を，現代数理物理学の観点から，包括的に考察し，物理現象およびそれを支える理法を，数学的に厳密かつ明晰な仕方で，普遍的・有機的・統一的に認識するための道の一つを提示することにある．本書の考察の対象となる物理学の基礎理論の範疇(はんちゅう)は，ニュートン力学，解析力学，特殊相対性理論，古典場の理論 (古典電磁気学，物質場の理論)，量子力学である[*1]．

普遍的理念としての対称性は，前著において示された形で言えば，数学的概念としての群の作用に関する不変性として把握される．本書も，第一義的には，この観点からの対称性に関わる[*2]．序章において，感覚的・経験的次元 (現象的次元) から普遍的理念としての対称性へと到る一つの道を概観したのちに，第 1 章で，群論と対称性の数学的一般論を展開する．第 2 章から，上述の物理学の基本領域を，第 1 章で論述された対称性の数学の光で照らしつつ，その本質あるいは根源へ直入(じきにゅう)する形で，横断的に見ていく．本書の主眼は，考察に付される物理学の各領域の理念的本質あるいは根源を明示し，対称性との関連において，物理現象の根底に存する理を普遍的・統一的に俯瞰しうる場を示唆することにある．これは，現代数理物理学の方法をまってはじめて可能となる．本書の論述の方法あるいは形式が，通常の物理学のそれと異なるのはこのためである．

本書は，冒頭に述べたこととの関連で言えば，前著の内容を，より高度の水準において，より広い範囲にわたって，詳述・敷衍(ふえん)する側面も有する．しかし，本書は単独で読まれてもよい．本書の第 6 章までを読むための数学としては，集合

[*1] 物理学の基礎理論の他の範疇として，熱力学，一般相対性理論，量子場の理論，古典および量子統計力学があるが，紙幅の都合上，これらの理論は割愛する．

[*2] 群に基づく対称性以外の対称性 (一般化された弱い意味での対称性) も存在する．たとえば，リー代数やその他の種々の代数のヒルベルト空間表現によって表わされる “対称性” (本書では，第 7 章と第 8 章においてこの種の対称性にふれる)．

と写像に関する入門的知識，微分積分学および線形代数学の標準的内容 (大学の理工系の 2 年次くらいまでに学ぶ内容)，現代ベクトル解析 (抽象ベクトル空間論) の初歩的知識が最小限前提とされる[*3]．また，第 7 章，第 8 章を読むためには，ヒルベルト空間論の基礎的知識が必要である[*4]．読者の便宜のために，これらの数学の要項を付録として付けたので活用していただければ幸いである (しかし，本書の付録は，本書を読むために最小限必要とされる予備的な数学的事項にすぎない)．物理学に関しては，一応，理工系の大学 1～2 年次に学ぶ程度の (古典力学から量子力学にわたる) 概論的内容を予備知識として想定している．しかし，物理学の知識がそれほどなくても，物理的像を描くことができる想像力があれば，物理的内容を理解できるように叙述を試みた．また，本書は，純粋に数学的に読めるようにも書いてある．

この本は，いわゆる教科書ではない．また，通常の意味での数学書でも物理学書でもない．敢えて分類するならば，現代数理物理学の書物の範疇に属する本と言えるであろう．だが，著者としては，本書がそれにとどまらず，現代数理物理学をその礎(いしずえ)の一つとする新しい自然哲学のための予備的な書の一冊となりうることを期するものである．本文の所々に哲学的な考察あるいは注釈を挿入したのはこの理由による．とはいえ，本書をどう読むかは，無論，読者の自由である[*5]．

本書の出版に際して，日本評論社の高橋健一さんにはいろいろとお世話になった．ここに心より感謝したい．

2007 年初秋　札幌にて

新井朝雄

*3 たとえば，拙著『現代ベクトル解析の原理と応用』(共立出版，2006) の 7 章までの内容のうちの基本的事項．

*4 たとえば，拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997)．

*5 著者の構想する新しい自然哲学の理念については，拙著『物理現象の数学的諸原理』(共立出版，2003) の序章および拙論文：「量子現象によって開示される存在論的構造」，『シェリング年報』(晃洋書房)，2006，第 14 号，95–103 の序節を参照．後者の原稿は，北海道大学学術成果コレクション HUSCAP (http://eprints.lib.hokudai.ac.jp/dspace/handle/2115/27964) で閲覧，ダウンロード可能．

記号表

標準的記号

記号	意味
$\mathbb{N}$	自然数全体の集合
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合
$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合
$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\mathbb{C}$	複素数全体の集合
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$
$\mathbb{K}^d$	$\mathbb{K}$ の d 個の直積集合

若干の論理記号

記号	意味
$A := B$	A を B によって定義する
「$P(x), x \in X$」または「$P(x)\ (\forall x \in X)$」	集合 X に属するすべての元 (要素) x に対して $P(x)$ が成立する.
$P \Longrightarrow Q$	P ならば Q
$P \Longleftrightarrow Q$	「P ならば Q」かつ「Q ならば P」

ベクトル空間論, ヒルベルト空間論における記号

記号	意味
$\mathscr{L}(D)$	部分集合 D から生成される部分空間
$\ker T$	線形作用素 T の核
$\overline{D}$	部分集合 D の閉包
$D(T)$	線形作用素 T の定義域
$\varrho(T)$	線形作用素 T のレゾルヴェント集合
$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$	T のスペクトル
$\sigma_{\mathrm{p}}(T)$	T の点スペクトル (T の固有値の全体)
$\overline{T}$	可閉作用素 T の閉包
T^*	T の共役作用素 ($D(T)$ が稠密な場合)

ギリシャ文字一覧表

A,	α	アルファ	N,	ν	ニュー
B,	β	ベータ	Ξ,	ξ	グザイ
Γ,	γ	ガンマ	O,	o	オミクロン
Δ,	δ	デルタ	Π,	π	パイ
E,	ϵ	イプシロン	P,	ρ	ロー
Z,	ζ	ゼータ	Σ,	σ	シグマ
H,	η	イータ	T,	τ	タウ
Θ,	θ	シータ (テータ)	Υ,	υ	ウプシロン
I,	ι	イオタ	Φ,	ϕ	ファイ
K,	κ	カッパ	X,	χ	カイ
Λ,	λ	ラムダ	Ψ,	ψ	プサイ
M,	μ	ミュー	Ω,	ω	オメガ

記号の対応表

A,	$\mathfrak{A}$,	$\mathfrak{a}$,	$\mathscr{A}$	N,	$\mathfrak{N}$,	$\mathfrak{n}$,	$\mathscr{N}$
B,	$\mathfrak{B}$,	$\mathfrak{b}$,	$\mathscr{B}$	O,	$\mathfrak{O}$,	$\mathfrak{o}$,	$\mathscr{O}$
C,	$\mathfrak{C}$,	$\mathfrak{c}$,	$\mathscr{C}$	P,	$\mathfrak{P}$,	$\mathfrak{p}$,	$\mathscr{P}$
D,	$\mathfrak{D}$,	$\mathfrak{d}$,	$\mathscr{D}$	Q,	$\mathfrak{Q}$,	$\mathfrak{q}$,	$\mathscr{Q}$
E,	$\mathfrak{E}$,	$\mathfrak{e}$,	$\mathscr{E}$	R,	$\mathfrak{R}$,	$\mathfrak{r}$,	$\mathscr{R}$
F,	$\mathfrak{F}$,	$\mathfrak{f}$,	$\mathscr{F}$	S,	$\mathfrak{S}$,	$\mathfrak{s}$,	$\mathscr{S}$
G,	$\mathfrak{G}$,	$\mathfrak{g}$,	$\mathscr{G}$	T,	$\mathfrak{T}$,	$\mathfrak{t}$,	$\mathscr{T}$
H,	$\mathfrak{H}$,	$\mathfrak{h}$,	$\mathscr{H}$	U,	$\mathfrak{U}$,	$\mathfrak{u}$,	$\mathscr{U}$
I,	$\mathfrak{I}$,	$\mathfrak{i}$,	$\mathscr{I}$	V,	$\mathfrak{V}$,	$\mathfrak{v}$,	$\mathscr{V}$
J,	$\mathfrak{J}$,	$\mathfrak{j}$,	$\mathscr{J}$	W,	$\mathfrak{W}$,	$\mathfrak{w}$,	$\mathscr{W}$
K,	$\mathfrak{K}$,	$\mathfrak{k}$,	$\mathscr{K}$	X,	$\mathfrak{X}$,	$\mathfrak{x}$,	$\mathscr{X}$
L,	$\mathfrak{L}$,	$\mathfrak{l}$,	$\mathscr{L}$	Y,	$\mathfrak{Y}$,	$\mathfrak{y}$,	$\mathscr{Y}$
M,	$\mathfrak{M}$,	$\mathfrak{m}$,	$\mathscr{M}$	Z,	$\mathfrak{Z}$,	$\mathfrak{z}$,	$\mathscr{Z}$

目　次

第7章　量子力学

第8章　超対称性

付録A　写像と同値関係

付録B　ベクトル空間論要項

付録C　計量ベクトル空間

付録D ベクトル解析

付録E テンソル空間

付録F ヒルベルト空間論における基本的事項

演習問題解答 (略解)

序章

対称性への道

としどしに咲くや吉野の山桜
木を割りて見よ花のありかを
大燈国師

I

私たちのまわりに広がる自然界には，種々さまざまな鉱物，植物，動物あるいは現象が存在し，それぞれ固有の形態を有している．直接的な観察によって，形態には“規則的な”ものとあまりそうでないものがあることがわかる．

鉱物の範疇では，たとえば，水晶や方解石はたいへん規則的な形をしている．通常の意味での鉱物ではないが，雪の結晶も見事な規則的パターンを示す (図 1).

植物では，葉の形および葉の出方に規則的なものが多い．特に，シダ類の植物は，それぞれ，際立った規則的・特徴的な形態をしている (図 2).

動物の体にも，下等動物から高等動物にわたって，その種に応じて特徴的で均整のとれた形態や構造が見られる (図 3).

液体や気体に関わる現象においては，流体の流れや雲の生成パターンなどにも独特の規則的な形態が現れうる．

地球の自然界を超えて宇宙に目を移せば，そこには，種々の惑星や恒星あるいは恒星の大集団である星雲が見出されるが，これらの形態にもある種の特徴や規則性が見られる．実際，惑星や恒星は球に近い形をしているし，楕円型，渦巻型，棒渦巻型と呼ばれる星雲 (銀河) は，その名称が示唆するように，幾何学的な形状を有する (図 4).

他方，物質的宇宙のもう一方の極である原子や分子のスケールの極微の世界においても，規則的な形態あるいはパターンが観測される (図 5).

次に，人間の文化世界に目を向けると，建築，絵画，彫刻あるいは日常の食器や家具などの形，装飾，デザインには規則的な形態や文様が多用されていること

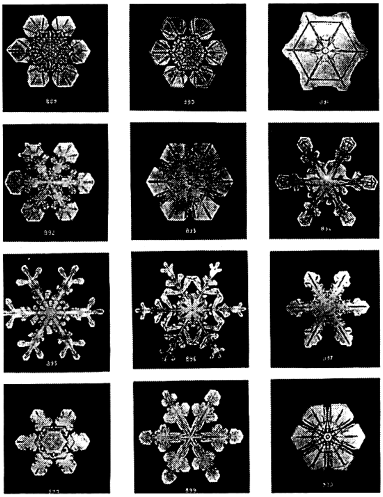


図 1 雪の結晶
(http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c2/SnowflakesWilsonBentley.jpg).



図 2 シダの例.

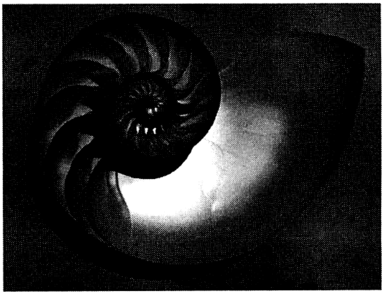
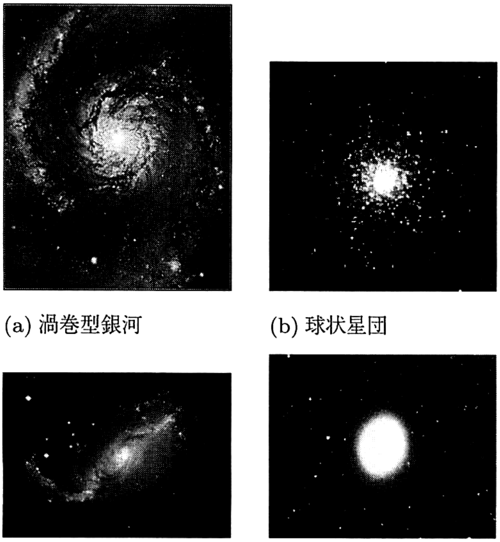


図 3 オウム貝 (This Wikipedia and Wikimedia Commons image is from the user Chris 73 and is freely available at http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg under the creative commons cc-by-sa 2.5 license).



(a) 渦巻型銀河　(b) 球状星団

(c) 棒渦巻型銀河　(d) 楕円型銀河

図 4　星雲の形態のパターン.
(a) http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2001/10/,
(b) http://ja.wikipedia.org/wiki/M13,
(c) http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2007/15/,
(d) http://en.wikipedia.org/wiki/Image:M32.jpg.

がわかる (図 6).

上に挙げた例からもわかるように，規則的な形や現象形態には，それぞれ，ある種の調和や美が伴っていることも見逃せない．これは，規則的な形態の本質が調和や美の本質とも深く関連していることを洞察させる*6．同様のことは，聴覚的形態が存在する音の知覚領域，特に，音楽の範疇においても見出される．だが，こうした側面については，ここでは，これ以上ふれない*7.

*6ただし，調和や美は，形態だけでなく，物をとりまく構造や色彩とも密接に関係している．絵画において美の究極的本質を追求したドゥースブルフ，モンドリアン，カンディンスキーといった抽象絵画の巨匠たちの作品が基本的に形態と色彩のコンポジション (composition) であるのは決して偶然ではない.

*7この方面の研究は，筆者の構想する数理芸術学へと連なるものであり，別著にて論じる予定である.

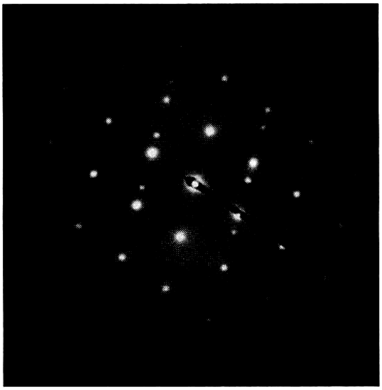


図 5　塩化ナトリウムの結晶の中性子回折像
(http://en.wikipedia.org/wiki/Image:
Austenite_ZADP.jpg).

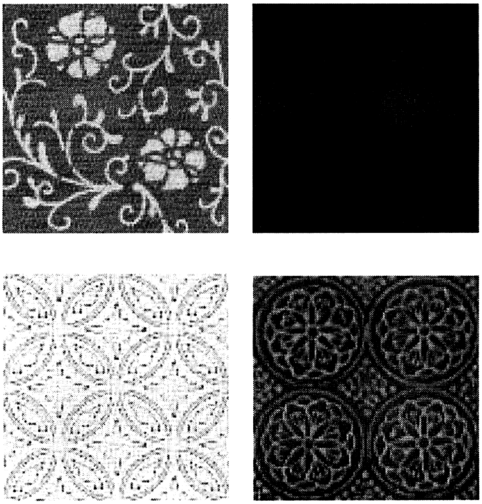


図 6　文様の例 (http://page.freett.com/nekokimi/).

これまでの叙述は，自然界や文化世界に関して，通常の日常的意識に映ずる断面を描写的に記述したものである．だが，この意識の水位においては，現象の表層的次元のリアリティ(reality) が観取されるだけにすぎない．しかし，この表層的次元を超え，現象のより深い根底へと突き進むことは可能である．その契機の1つは次の問いによって与えられる．すなわち，形態を規則的なものとそうでないものとに分ける根拠は何か，という問いである．これは，前段に述べたこととの関連でいえば，美の根拠を探究する精神に連なるものである．結論からいってしまえば，この問いに答えるための1つの鍵概念が，まさしく，本書の主題である**対称性**あるいは**シンメトリー** (symmetry) なのである．だが，ここで一言注意しておくと，対称性という言葉は，日常的な文脈では，もっぱら左右対称性 (相称性) の意味に限定されて使われるきらいがあるが，ここで言及されている対称性，すなわち，数学の言葉あるいは術語としての対称性は，左右対称性を単に1つの例として実現するようなもっと抽象的で包括的な高次の理念 (イデア) のことであり，より正確にいうならば，普遍的理念としての対称性である．この根源的理念の，さまざまな抽象的ないし具象的コンテクストにおける実現として，種々の個別的対称性が生み出されるのである．

現象や対象の形態の規則性を種々の対称性の現れ，あるいは "表現" として捉える観点からは，規則的でない形態は，**対称性の破れ**として把握される．この場合，形態の不規則性の相違は，対称性の破れの度合いの違いとして理解される．こうして，対称性の理念を基底として，全形態界に対する統一的な認識の枠組みの1つが構築される*8.

II

普遍的理念としての対称性へと到る道はいくつかありうる．ここでは，本文への導入を兼ねて，個別的な対称性から入る1つの道について，発見法的に手短に述べておく．

すでに示唆したように，対称性というときに，多くの人がすぐに想い浮かべるのは，左右対称性であろう．実際，左右対称的な対象は，私たちの周囲に難なく

*8 対称性の破れはきわめて重要な概念の1つであるが，これに関しては，本書では，超対称性の破れ (第8章) を除いて論述を控えた．たとえば，拙稿「対称性の破れ — いかにして物や現象の形態を統一的にとらえるか」,『数学セミナー』(日本評論社), vol.38, no.2 (1999), 24–30 を参照.

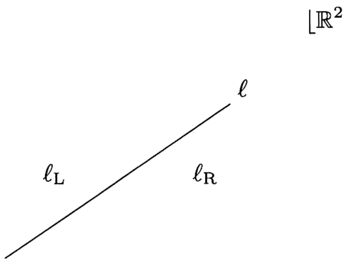


図 7　直線 ℓ による平面 $\mathbb{R}^2$ の分割.

見いだすことができる．たとえば，人間や獣類，鳥類，魚類などの動物の体あるいは植物の葉の多くは，それぞれ，然るべき視点から眺めれば，左右対称的に見える．建築物，家具，食器などについても同様のことが観察される．では，左右対称性は数学的にはどのようにとらえられるであろうか．まず，この問題を考えよう．簡単のため，2 次元実空間 (平面)

$$\mathbb{R}^2 := \{\boldsymbol{r} = (x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

— $\mathbb{R}$ は実数の全体 — の中の図形の左右対称性について考察する[*9]．この場合，第一にはっきりさせねばならないことは，平面における “左右” とはそもそも何かということである．この問いに対する答えは，通常，私たちが無意識のうちに前提としていることを理性的意識に上らせれば，ただちに得られる．すなわち，まず，任意の (無限) 直線 ℓ は $\mathbb{R}^2$ の中に 2 つの互いに素な部分 $\ell_{\mathrm{L}}, \ell_{\mathrm{R}}$ を生み出すという幾何学的事実に注目することである (図 7) : $\mathbb{R}^2 = \ell \cup \ell_{\mathrm{L}} \cup \ell_{\mathrm{R}}, \ell_{\mathrm{L}} \cap \ell_{\mathrm{R}} = \varnothing, \ell \cap \ell_{\mathrm{L}} = \varnothing, \ell \cap \ell_{\mathrm{R}} = \varnothing$. 集合 ℓ_{L} を ℓ の**左側部分**，ℓ_{R} を ℓ の**右側部分**と呼ぶ[*10]．

こうして，平面 $\mathbb{R}^2$ における左右の概念が厳密に定義される．この定義からただちにわかることは，$\mathbb{R}^2$ における左右という概念は，各直線に応じて定まるということであり，その意味で，相対的な概念であるということである．

平面図形は，もっとも一般的には，$\mathbb{R}^2$ の部分集合として定義される．すると，

---

*9「$A := B$」は，A を B によって定義することを表す記法である．

*10 この名称の付け方は，純数学的には，逆でもよいし，別に他の名称でも一向に差し支えない．本質的な点は，任意の直線 ℓ に対して，$\mathbb{R}^2 \setminus \ell$ が互いに素な 2 つの部分集合からなるという一事である．ただ，日常的な慣習と一致するように名称を選んだ方が感覚的描像との対応において自然であり，したがって，応用上も便利である．

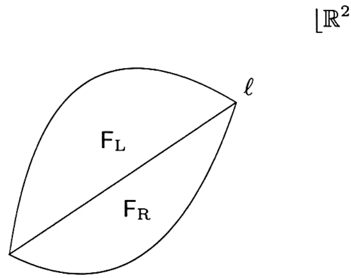


図 8　図形 F の左側部分 F_L と右側部分 F_R.

各直線 ℓ に対して，ℓ に関する平面図形の左側部分，右側部分なる概念が次のようにして定義される．$F \subset \mathbb{R}^2$ を任意の平面図形としよう．このとき互いに素な 3 つの集合

$$F_L := F \cap \ell_L, \quad F_\ell := F \cap \ell, \quad F_R := F \cap \ell_R$$

が定まり

$$F = F_L \cup F_\ell \cup F_R$$

が成り立つ．集合 F_L, F_R をそれぞれ，F の，ℓ に関する**左側部分**，**右側部分**と呼ぶ (図 8).

以上の準備のもとで，平面図形の左右対称性の素朴な (感覚的) 見方を述べることができる．すなわち，平面図形 $F \subset \mathbb{R}^2$ が直線 ℓ に関して左右対称であるとは，直線 ℓ を軸として平面 $\mathbb{R}^2$ を “折り重ね” たときに，F_L と F_R がぴったりと重なるということである (図 9)*11．ところで，直線 ℓ を軸とする平面 $\mathbb{R}^2$ の “折り重ね” という操作は，次の性質を持つ空間的操作の 1 つと見ることができる：(i) ℓ_L に属する点を ℓ_R に属する点に写す，(ii) ℓ_R に属する点を ℓ_L に属する点に写す，(iii) ℓ 上の点は，変化させないでそのままに留める．すると，F が ℓ に関して左右対称な図形ならば，F全体は，この “折り重ね” によって不変であることがわかる (∵ “折り重ね” によって，F_L は F_R へ，F_R は F_L へ写される．一方，F_ℓ は不変である).

---

*11 無論，ここでいう “折り重ね” という操作は，理念的世界でのみ可能な “操作” を感覚的な表象を用いて象徴的に述べたものである．物質的・感覚的次元では，任意の操作はつねに有限的に限定されるので，無限が関与する操作について語ることは無意味である．

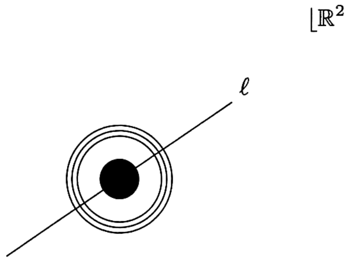


図 9　直線 ℓ に関して左右対称な図形の例.

逆に，直線 ℓ を軸とする，平面 $\mathbb{R}^2$ の “折り重ね” によって，F 全体が不変ならば，F_L と F_R は，この “折り重ね” によってぴったりと重なる.

ゆえに，ある直線に関して左右対称な図形とは，この直線を軸とする平面の “折り重ね” という空間的操作に関して不変な図形として特徴づけることができる.

いうまでもなく，平面において，上述の “折り重ね” 以外にも，種々の空間的操作が可能である．たとえば平行移動 (並進)，回転がある．上に特徴づけた左右対称性の例にならうならば，これらの操作で不変に保たれる図形として，それぞれ，並進対称な図形，回転対称な図形が定義されることになる．他の空間的操作についても同様である．こうして，左右対称性とは異なる種々の対称性の範疇が見出される.

III

前節の最後の段において示唆された，対称性に関わる構造は，2 次元実空間においてだけでなく，任意の自然数 n に対して定まる n 次元実空間

$$\mathbb{R}^n := \{x=(x_1,\cdots,x_n)\,|\,x_j\in\mathbb{R}\ (j=1,\cdots,n)\}$$

— 純理念的には n 個の実数の組の全体 — や一般のベクトル空間においてもその自然な一般化を見出すことが可能である．このようにして，種々の具体例を通して，対称性に関して獲得される観点を普遍性の高みへ向かって徹底的に押し進めていくことにより，対称性の一般的概念像が得られる．すなわち，空間 (集合) X の中の図形＝部分集合の対称性とは，X における 1 つまたは複数の空間的操作のもとでの当該の図形の不変性である，という概念像である．だが，この概念像を

普遍的な概念として厳密かつ明晰にとらえるためには，具象的・個別的対称性と関わる空間的操作の数学的構造を調べる必要がある．

結論から述べると次のようになる．まず，対称性の基礎となる空間的操作は，その空間に作用する全単射な写像であることがわかる[*12]．これから，X の図形がある全単射な写像の作用のもとで不変であるとき，その図形は 1 つの対称性を持つという形で，X の図形に関する，もっとも基本的な対称性の概念が定義される[*13]．したがって，X 上の任意の全単射な写像に 1 つの対称性が同伴することになる．すると，概念の自然な展開として，X の任意の図形 $\mathsf{D} \neq \emptyset$ に対して，これを不変にする全単射な写像の全体

$$\mathfrak{S}(\mathsf{D}) := \{f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{X} \,|\, f \text{ は全単射で } f(\mathsf{D}) = \mathsf{D} \text{ を満たす}\}$$

— 換言すれば，D の対称性を与える全単射な写像の全体 — が思考の網に入ってくる．そこで，この集合の構造を調べることが次の課題となるが，それはある特徴的な構造を持っていることがわかる[*14]．そして，この構造の一般化へと思考を向けることにより，X 上の**変換群**なる理念に到達する[*15]．こうして，対称性の普遍的理念は，変換群の作用のもとでの不変性として捉えられる．各変換群ごとに，1 つの対称性が付随するのである．

ところで，変換群は，その要素 (全単射な写像) が作用する空間 (集合) の存在を前提とする．そこで，変換群が作用する空間を捨象し，変換群の純構造的な部分だけに着目すると，変換群をその特殊形態の 1 つとして実現するより高次の普遍的な理念が見出される．これが，**群**と呼ばれる代数的理念である．こうして，群の理念により，対称性の範疇は，日常的・感覚的な次元を超えて統一的な形で一挙に拡大するとともに，対称性の根源の 1 つは群であるという認識に到達する．この普遍的な認識の高みに立つことにより，種々さまざまな個別的対称性を，群という 1 つの絶対的基点から調和的・統一的に俯瞰することが可能となる．これは，感覚的・表層的次元にとどまっていたのでは得ることができない，深く，美しい認識である．もちろん，この認識は美しいというだけでなく，応用上も強力

[*12]写像については，本書の付録 A を参照.

[*13]集合 X の図形 = 部分集合 $\mathsf{D} \neq \emptyset$ が，写像 $f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{X}$ の作用のもとで不変であるとは，$f(\mathsf{D}) = \mathsf{D}$ が成り立つ場合をいう．ただし，X の部分集合 M に対して，$f(\mathsf{M}) := \{f(x) \,|\, x \in \mathsf{M}\}$ (f による M の像).

[*14]詳細については，本書の第 1 章の 1.5 節を参照.

[*15]変換群の定義は，本書の第 1 章，1.4 節で述べる．$\mathfrak{S}(\mathsf{D})$ は変換群の一例である.

である[*16].

以上の概観を1つの前提として，本書の本文の論述は，群の理論＝群論の初等的部分を展開することから始まる (第1章)．これは，比喩的・象徴的にいえば，数学的理念界のある領域を “上方” から “下方” へと向かう立場である[*17]．第2章から，本書の主題である物理学における対称性の種々相を横断的に見ていく．これは，群の理念が，物理現象の次元においてどのように働いているか，その基本的側面を認識させてくれるはずである．

[*16]群の中には，自らのうちに，感覚的には表象しにくい純代数的構造を有しているものがある．この場合には，その純代数的構造の方が数学的により根源的であり，当該の対称性の真の源であると考えられる．リー代数あるいはリー環と呼ばれる代数 (第1章，1.8節を参照) はそのような対象の1つである．

[*17]上来は，逆に，“下方” から “上方” へと到る道の1つを示したものである (この側面について，さらにくわしいことは，拙著『対称性の数理』(日本評論社，1993) を参照)．哲学に興味のある読者のために一言申し添えるならば，対称性の理論に限らず，いかなる現象の範疇に対しても，その理法に関して，“下方” から “上方” への道とその逆の道が存在しうる．自然哲学的には，この両者を動的かつ統一的に認識することが重要である．それは禅的な存在認識へと通じるものである．

第1章

群と対称性 — 一般論

本書の主題 — 物理学における対称性 — を統一的に扱うための数学的基礎を論述する．まず，群と呼ばれる普遍的な理念に関する数学理論，すなわち，群論の入門的部分を叙述する．次に，変換群と呼ばれる群の範疇 — これは群の理念が写像の空間に実現されたもの — に関する事項を手短に記述する．最後に，抽象的な水準において，変換群の定める対称性の一般論を展開する．

1.1 群

群に関わる数学的構造に関して統一的な認識が得られるように，まず，群のいわば "前段階" に位置する普遍的な理念の定義からはじめることにする．この理念は半群と呼ばれるものであり，もっとも身近な数学的領域では，自然数全体 $\mathbb{N} := \{1,2,3,\cdots\}$[*1]，整数全体 $\mathbb{Z} := \{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots\}$, 有理数全体 $\mathbb{Q} := \{m/n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$, 実数全体 $\mathbb{R}$, 複素数全体 $\mathbb{C}$ における算法 — 基本的に足し算 (加法) あるいは掛け算 (乗法) — に現れている普遍的理念の 1 つである[*2]．

定義 1.1 X を空でない集合とする．X の直積集合 $\mathsf{X}\times\mathsf{X} := \{(x,y) \mid x,y \in \mathsf{X}\}$ (X の 2 つの元 (要素) の対(つい)の全体) から X への写像，すなわち，X の元の各対 (x,y) $(x,y \in \mathsf{X})$ に対して，X の元 $B(x,y)$ をただ 1 つ定める対応 $B:(x,y) \longmapsto B(x,y)$ を

---

*1「$A := B$」は A を B によって定義することを表す記法．

*2 逆にいえば，$\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ における加法あるいは乗法の構造を抽象化することにより見出される理念であるということ．

X 上の **2 項演算** (binary operation) または**算法**と呼ぶ[*3]. 2 項演算 B を 1 つ固定して考察するとき, B の "値" $B(x,y)$ を, 通常, xy のように表す[*4] : $B(x,y) = xy$.

次の例で示されるように, 集合 X が有する 2 項演算は 1 つとは限らない. その場合には, 異なる 2 項演算によって得られる元は, 異なる記号で表される.

例 1.2 A は $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ のいずれかであるとする. (i) A における足し算 (和, 加法), すなわち, 写像 $S:\mathsf{A}\times\mathsf{A}\longrightarrow\mathsf{A}; S(x,y):=x+y\ (x,y\in\mathsf{A})$ は A における 2 項演算である. (ii) A における掛け算 (積, 乗法), すなわち, 写像 $M:\mathsf{A}\times\mathsf{A}\longrightarrow\mathsf{A}$; $M(x,y):=xy\ (x,y\in\mathsf{A})$ も A における 2 項演算である.

もっとも単純で自然な法則性にしたがう 2 項演算を持つ集合を導入する :

定義 1.3 空でない集合 S において, 2 項演算 : $\mathsf{S}\times\mathsf{S}\ni(a,b)\longmapsto ab\in\mathsf{S}$ が定義され, **結合法則** $(ab)c=a(bc)\ (a,b,c\in\mathsf{S})$ を満たすとき, S を**半群** (semi-group) と呼ぶ.

すべての $a\in\mathsf{S}$ に対して, $ae=a=ea$ を満たす元 $e\in\mathsf{S}$ があるならば, e を S の**単位元**という.

もし, すべての $a,b\in\mathsf{S}$ に対して, $ab=ba$ (可換性) が成り立つならば, S を**可換半群**と呼ぶ.

例 1.4 $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ のいずれも加法と乗法について, 可換半群である. さらに次のことがわかる : (i) $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ における乗法の単位元は 1 である. (ii) $\mathbb{N}$ は加法の単位元を持たない. (iii) $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ における加法の単位元は 0 である.

例 1.5 非負実数の全体 $[0,\infty):=\{t|0\le t<\infty\}$ は実数の加法に関して可換半群である. この場合, 単位元は 0 である.

半群に, 別の自然な構造が加わることにより, 1 つの普遍的な理念が生み出される. それが本節の主題, 群である :

[*3] 以下の理論展開において基礎となる写像の概念およびこれに関わる基本的事項については, 付録 A を参照.

[*4] 文献によっては, $B(x,y)$ を $x\circ y$ のように記す場合もある.

定義 1.6　空でない集合 G において，2 項演算：$\mathsf{G}\times\mathsf{G}\ni(a,b)\longmapsto ab\in\mathsf{G}$ が定義され，以下の 3 つの条件 (G.1)〜(G.3) を満たすとき，G を**群** (group) と呼ぶ：

(G.1) (**結合法則**)　$(ab)c=a(bc)$ $(a,b,c\in\mathsf{G})$.

(G.2) (**単位元の存在**)　ある元 $e\in\mathsf{G}$ があって，すべての $a\in\mathsf{G}$ に対して $ae=ea=a$ が成立する．e を G の**単位元**という．

(G.3) (**逆元の存在**)　各 $a\in\mathsf{G}$ に対して，$aa^{-1}=a^{-1}a=e$ を満たす元 $a^{-1}\in\mathsf{G}$ が存在する．a^{-1} を a の**逆元**という．

条件 (G.1)〜(G.3) は**群の公理系**と呼ばれる．この場合，任意の $g\in\mathsf{G}$ に対して，ag $(a\in\mathsf{G})$ を割り当てる対応を a の**左作用**という．ag を得ることを「g に a を左から作用させる，あるいは左からかける」という．また，ga を割り当てる対応を a の**右作用**という．ga を得ることを「g に a を右から作用させる，あるいは右からかける」という．

明らかに，群は半群である．

群の公理系に関して，補足的な注意をしておこう．

(i) 群 G の単位元はただ 1 つである．実際，別に $ae'=e'a=a$ $(a\in\mathsf{G})$ を満たす元 $e'\in\mathsf{G}$ があったとすれば，$a=e$ として，$ee'=e'e=e$. 他方，(G.2) で $a=e'$ とすれば，$e'e=ee'=e'$. ゆえに $e=e'$.

2 つ以上の群をいっしょに考察する場合，群 G の単位元 e を他の群の単位元と区別するために，$e=e_{\mathsf{G}}$ と記す場合がある．

(ii) 各 $a\in\mathsf{G}$ の逆元もただ 1 つである．実際，別に，$aa'=a'a=e$ となる $a'\in\mathsf{G}$ があったとすれば，左から a^{-1} を作用させることにより，$a'=a^{-1}e=a^{-1}$ を得る．

(iii) 群 G を定義する演算：$(a,b)\longmapsto ab$ — **群の演算** — は，“積” あるいは “乗法” と呼ばれる場合がある．この “積” が可換のとき，すなわち，すべての $a,b\in\mathsf{G}$ に対して $ab=ba$ が成り立つとき，G を**可換群**あるいは**アーベル群**という．

(iv) G が可換群の場合，演算：$(a,b)\longmapsto ab$ を “積” という代わりに “和” と呼び，ab を $a+b$ と書く場合がある．この場合には，群は**加群**と呼ばれ，その単位元は 0, a の逆元は $-a$ と書かれる．だが，群の演算の表記の表し方は便宜的なものであり，数学的に本質的な事柄ではない．

G を群とする．自然数 $n\geq 3$ と任意の $a_1,\cdots,a_n\in\mathsf{G}$ に対して，積 $a_1\cdots a_n\in\mathsf{G}$ を帰納的に

$$a_1\cdots a_n:=(a_1\cdots a_{n-1})a_n,\quad n\geq 3 \tag{1.1}$$

によって定義する．Gの各元gと$n\in\mathbb{N}$に対して

$$g^n := \underbrace{g\cdots g}_{n\text{ 個}}, \quad g^{-n} := (g^{-1})^n \tag{1.2}$$

と記し，それぞれ，gのn乗，マイナスn乗という．$g^0 := e$とする．

例 1.7 $\mathbb{N}$は加法においても乗法においても群ではない．したがって，$\mathbb{N}$は，群ではない半群の例である．

例 1.8 整数の全体$\mathbb{Z}$は整数の加法に関して加群である．この場合，単位元は0であり，$n\in\mathbb{Z}$の逆元は$-n$である．

例 1.9 有理数の全体$\mathbb{Q}$は，加法に関して加群である．単位元は0であり，$q\in\mathbb{Q}$の逆元は$-q$である．$\mathbb{Q}^\times := \mathbb{Q}\setminus\{0\}$とすれば，これは有理数の乗法に関してアーベル群(可換群)をなす．この場合，単位元は1であり，$q\in\mathbb{Q}^\times$の逆元はその逆数$1/q$である．

例 1.10 $\mathbb{K}$によって$\mathbb{R}$または$\mathbb{C}$を表す．$\mathbb{K}$から0を除いた集合$\mathbb{K}^\times := \mathbb{K}\setminus\{0\}$は数の乗法に関してアーベル群をなす．この場合，単位元は1であり，$a\in\mathbb{K}$の逆元はその逆数$1/a$である．

例 1.11 $n\in\mathbb{N}$とする．$\mathbb{K}$のn個の直積集合($\mathbb{K}$の元のn個の組の全体)

$$\mathbb{K}^n := \{\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \,|\, x_j \in \mathbb{K}, j = 1, \cdots, n\} \tag{1.3}$$

の任意の2つの元$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$に対して，和$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$を

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} := (x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, \overset{j\text{ 番目}}{x_j+y_j}, \cdots, x_n+y_n)$$

によって定義すれば，この和の演算に関して$\mathbb{K}^n$は加群になる．この場合，単位元は$\mathbf{0} = (0,0,\cdots,0)$(すべての成分が0の元)であり，$\boldsymbol{x}$の逆元は$-\boldsymbol{x} := (-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$である．加群$\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$の場合)をn**次元実並進群**，加群$\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$の場合)をn**次元複素並進群**と呼ぶ．

例 1.12 任意の$n\in\mathbb{N}$に対して，$\omega_n := e^{2\pi i/n}$とおく(eはネピア数[*5]，iは虚数単位)．このとき，$\omega_n^n = 1$．これを用いると集合$\mathsf{P}_n := \{\omega_n^k \,|\, k = 0, 1, \cdots, n-1\}$ ($z^0 := 1$ $(\forall z\in\mathbb{C})$)は複素数の積に関して群になる．この群はアーベル群である．P_nの各元は，ちょうど，複素平面の原点を中心とする正n角形の頂点を表す(図1.1)．これにちなんで，P_nを**正n角形群**と呼ぶ．

[*5] $e := \lim_{N\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^N$.

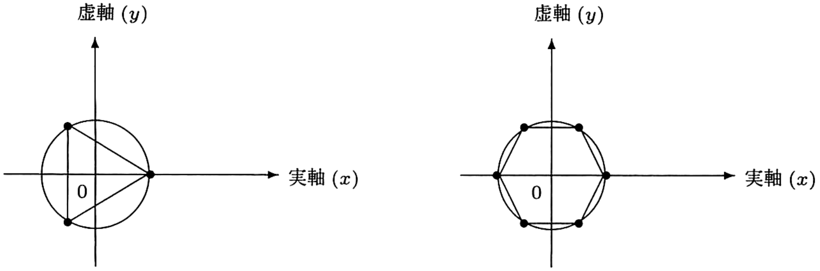


図 **1.1**　P_3 (左) と P_6 (右).

例 1.13　各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{K}$ の元を行列要素 (成分) とする n 次の正方行列の全体を $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ で表す：

$$\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) := \{A = (A_{ij})_{i,j=1,\cdots,n} \mid A_{ij} \in \mathbb{K}\ (i,j=1,\cdots,n)\}. \tag{1.4}$$

n 次の単位行列を I_n で表す：$(I_n)_{ij} := \delta_{ij}$ $(i,j=1,\cdots,n)$. ここで，δ_{ij} は**クロネッカーのデルタ**を表す ($i=j$ ならば $\delta_{ij}=1; i \neq j$ ならば $\delta_{ij}=0$).

行列 $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ に対して，$AB = I_n = BA$ を満たす行列 $B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ があるとき，A は**正則**であるという．この場合，B を A の**逆行列**と呼び $B = A^{-1}$ と記す．正則な n 次正方行列の全体

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) := \{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ は正則}\}$$

は行列の積の演算に関して群になる．

証明　$I_n \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ は明らかであり，$AI_n = I_nA = A, A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ が成り立つ．また，任意の $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ に対して，$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ であるから，A^{-1} は正則であり，$(A^{-1})^{-1} = A$. したがって，特に，$A^{-1} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. さらに，任意の $A, B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ に対して，$C = B^{-1}A^{-1}$ とおけば，$(AB)C = I_n, C(AB) = I_n$ であるから，$AB \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. 行列の積の結合則は容易に示される．■

いまの証明からわかるように，群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ の単位元は I_n であり，$A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ の逆元は A^{-1} である．$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ を n 次の**実一般線形群**，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ を n 次の**複素一般線形群**という．$\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ を総称的に n **次の一般線形群**と呼ぶ．なお，$\mathrm{GL}(1,\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\times}$ である．

$n \geq 2$ ならば，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ は非可換群 (非アーベル群) である (問題 1).

例 1.14 V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$)，V から V への線形作用素の全体を L(V) と記す[*6]．このとき，V 上の全単射な線形作用素の全体

$$\mathrm{GL}(\mathsf{V}) := \{T \in \mathsf{L}(\mathsf{V}) \,|\, T \text{ は全単射}\} \tag{1.5}$$

は作用素の積に関して群をなす．

証明 V 上の恒等写像 I_V が GL(V) の元であることは明らか．$T \in \mathsf{L}(\mathsf{V})$ ならば，その逆写像 T^{-1} も全単射であるから，$T^{-1} \in \mathsf{L}(\mathsf{V})$．さらに，$T, S \in \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ ならば，TS も全単射であるから ($\because R = S^{-1}T^{-1}$ とおけば，$(TS)R = I_\mathsf{V} = R(TS)$)，$TS \in \mathrm{GL}(\mathsf{V})$．結合則は，写像の結合則による． ■

この証明からわかるように，GL(V) の単位元は I_V であり，$T \in \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ の逆元は T の逆作用素 T^{-1} である．群 GL(V) を V **上の一般線形群**という．

群は，その集合としての濃度 — 平たくいえば，群を構成する元の "個数" — に応じて，2 つの範疇に分けられる：

定義 1.15 群 G の濃度を G の**位数** (order) という．位数が有限の群を**有限群**，位数が無限の群を**無限群**と呼ぶ．

例 1.16 加群 $\mathbb{Z}$, 並進群 $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^\times, \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ は，いずれも無限群である．正 n 角形群 (例 1.12) は位数 n の有限群である．

1.2 部分群

G を群とする．G の部分集合 H が G の群の演算に関して群であるとき，H を G の**部分群** (subgroup) という．

H が G の部分群ならば，その単位元は G の単位元に等しく，H の任意の元 h の逆元は，h^{-1} に等しい[*7]．

例 1.17 整数全体 $\mathbb{Z}$ の d 個の直積 $\mathbb{Z}^d = \{\boldsymbol{n} = (n_1, \cdots, n_d) \,|\, n_j \in \mathbb{Z}\ (j = 1, \cdots, d)\}$ と実数 k に対して $k\mathbb{Z}^d := \{k\boldsymbol{n} \,|\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d\}$ とすれば ($k\boldsymbol{n} := (kn_1, kn_2, \cdots, kn_d)$)，$k\mathbb{Z}^d$ は並進群 $\mathbb{R}^d$ の部分群である ($\because \boldsymbol{0} = k\boldsymbol{0} \in k\mathbb{Z}^d$ および任意の $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d$ に対して，

[*6] 付録 B を参照．抽象ベクトル空間の理論に慣れていない読者は，$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathsf{V} = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \cdots, \mathbb{R}^n, \cdots$ として読み進められたい．

[*7] H の単位元を e_H とすれば，$he_\mathsf{H} = h\ (\forall h \in \mathsf{H})$．そこで，左から h^{-1} を作用させれば，$e_\mathsf{H} = e$．また，h の逆元を h' とすれば $hh' = e_\mathsf{H} = h'h$ であるが，いま示したように $e_\mathsf{H} = e$ であるので，$h' = h^{-1}$．

$\boldsymbol{kn}+k\boldsymbol{m}=k(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}), -(k\boldsymbol{n})=k(-\boldsymbol{n})\in k\mathbb{Z}^d$ に注意).

次の命題は部分群の特徴づけを与えるものであり，群の部分集合が部分群であることを検証する際に有用である.

命題 1.18 群 G の部分集合 H が G の部分群であるための必要十分条件は，任意の $g,h\in\mathsf{H}$ に対して，$gh\in\mathsf{H}$ かつ $h^{-1}\in\mathsf{H}$ が成り立つことである.

証明 必要性は部分群の定義から明らかであろう.

十分性を示すために，任意の $g,h\in\mathsf{H}$ に対して，$gh\in\mathsf{H}\cdots(*)$ かつ $h^{-1}\in\mathsf{H}\cdots(**)$ が成り立つとしよう. $(*)$ は，H において，G の演算が定義されることを意味する. すると，G の結合則により，H においても結合則が成り立つことになる. $(*)$ と $(**)$ により，$h\in\mathsf{H}$ ならば $hh^{-1}\in\mathsf{H}$ であるから，$e\in\mathsf{H}$. 明らかに，$he=eh=h$ $(\forall h\in\mathsf{H})$. さらに，任意の $h\in\mathsf{H}$ に対して $h^{-1}\in\mathsf{H}$ であり，$hh^{-1}=e=h^{-1}h$ であるから，h は逆元を持つ. ■

系 1.19 群 G の部分集合 H が G の部分群であるための必要十分条件は，任意の $g,h\in\mathsf{H}$ に対して，$gh^{-1}\in\mathsf{H}$ が成り立つことである.

証明 必要性は自明. 十分性を示すために，$g,h\in\mathsf{H}$ とする. このとき，仮定により $gh^{-1}\in\mathsf{H}$. $h=g$ の場合を考えると $e\in\mathsf{H}$. そこで，$g=e$ とすれば，$h^{-1}\in\mathsf{H}$. これは $gh=g(h^{-1})^{-1}\in\mathsf{H}$ を意味する. したがって，命題 1.18 により，H は G の部分群である. ■

例 1.20 n 次正方行列 $A=(A_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}\in\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ に対して，その (i,j) 成分が A_{ji} である行列を ${}^{t}\!A$ と記し，A の**転置行列**という：$({}^{t}\!A)_{ij}:=A_{ji}$ $(i,j=1,\cdots,n)$.

n 次の実行列 $T\in\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ について ${}^{t}TT=I_n$ が成り立つとき，T を**直交行列**と呼ぶ. この場合，T は正則であり，$T^{-1}={}^{t}T$ であるから $T{}^{t}T=I_n$ も成り立つ[*8]. すなわち，T^{-1} も直交行列である. さらに，$T,S\in\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ が直交行列ならば ${}^{t}(TS)(TS)={}^{t}S{}^{t}TTS={}^{t}SS=I_n$ が成立するから，TS も直交行列である. したがって，命題 1.18 によって実一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の部分集合

$$\mathrm{O}(n):=\{T\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\,|\,T\text{ は直交行列 }\}\tag{1.6}$$

は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の部分群をなす. これを n **次直交群** (orthogonal group) という.

[*8] 一般に，行列 $A,B\in\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ について，$AB=I_n$ が成り立つならば A,B はともに正則であり，$B^{-1}=A$ が成り立つ. 証明については，線形代数や行列論の本を参照.

同様にして，O(n) の部分集合

$$\mathrm{SO}(n) := \{T \in \mathrm{O}(n) \mid \det T = 1\} \tag{1.7}$$

($\det T$ は行列 T の行列式を表す) は O(n) の部分群をなすことがわかる*9．これを n **次元回転群**または n **次特殊直交群** (special orthogonal group) という*10.

例 1.21 GL$(n,\mathbb{R})$ は GL$(n,\mathbb{C})$ の部分群である．

例 1.22 n 次の複素正方行列 $A=(A_{ij})_{i,j=1,\cdots,n} \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ に対して，その (i,j) 成分が $\bar{A}_{ji}$ (A_{ji} の複素共役) である行列を A の**エルミート共役**あるいは単に**共役**といい，A^* と記す：$(A^*)_{ij} := \bar{A}_{ji}$ $(i,j=1,\cdots,n)$.

A が実行列であれば $A^* = {}^t\!A$ であることに注意しよう．

複素行列 $U \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ について，$U^*U = I_n$ が成り立つとき，U を n 次の**ユニタリ行列**と呼ぶ．この場合，U は正則であり $U^* = U^{-1}$ だから，$UU^* = I_n$ も成り立つ．したがって，$U^* = U^{-1}$ もユニタリ行列である．直交群の場合と同様にして n 次のユニタリ行列の全体

$$\mathrm{U}(n) := \{U \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C}) \mid U \text{ はユニタリ行列}\} \tag{1.8}$$

は GL$(n,\mathbb{C})$ の部分群であることが示される．この群を n **次元ユニタリ群**という．

また，群 SO(n) の場合と同様にして，U(n) の部分集合

$$\mathrm{SU}(n) := \{U \in \mathrm{U}(n) \mid \det U = 1\} \tag{1.9}$$

は U(n) の部分群であることもわかる．この群は n 次の**特殊ユニタリ群** (special unitary group) と呼ばれる．

例 1.23 行列式が 1 の行列の全体

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{K}) := \{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det A = 1\} \tag{1.10}$$

は GL$(n,\mathbb{C})$ の部分群であり，**特殊線形群** (special linear group) と呼ばれる*11.
SL$(n,\mathbb{R})$, SL$(n,\mathbb{C})$ をそれぞれ，**実特殊線形群**，**複素特殊線形群**という．

一般に，GL$(n,\mathbb{C})$ の部分群を総称的に n 次の**行列群**と呼ぶ．

---

*9 証明には，行列式の性質 $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, $\det A^{-1} = 1/\det A$ を用いればよい．

*10 回転群という名称は，$T \in \mathrm{SO}(n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の線形写像と見るとき，これが，幾何学的には，$\mathbb{R}^n$ の原点のまわりの点の回転を表すことによる．

*11 証明は，SO(n) の場合と同様．

1.3 基本的な概念

これまでに見てきた例からも示唆されるように，群の理念の具象的実現，すなわち，個別的・具体的な群は無数に存在する．そこで，次に問題になるのは，無数に存在する群の間にあり得る関係あるいは関連を考察することである．この節では，この側面を抽象的・一般的水準で扱うための基本的な概念を導入する．

1.3.1 準同型写像と核

G,H を群とする．写像 $\phi:\mathsf{G}\longrightarrow\mathsf{H}$ がすべての a,b に対して $\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)$ を満たすとき — この性質を写像 ϕ の**準同型性**という —，ϕ を G から H の中への**準同型写像** (homomorphism) という．これは，つまり，群の構造を保存するような写像のことである．

準同型写像 $\phi:\mathsf{G}\longrightarrow\mathsf{H}$ が全射であるとき (i.e., $\phi(\mathsf{G}):=\{\phi(g)\,|\,g\in\mathsf{G}\}=\mathsf{H}$)，$\mathsf{G}$ は H に**準同型** (homomorphic) であるという．

群の準同型写像に関する次の事実は基本的である：

命題 1.24 $\phi:\mathsf{G}\longrightarrow\mathsf{H}$ を準同型写像とする．このとき，次の (i)〜(iii) が成り立つ：

(i) ϕ は G の単位元 e_{G} を H の単位元 e_{H} に写す：$\phi(e_{\mathsf{G}})=e_{\mathsf{H}}$.

(ii) 任意の $g\in\mathsf{G}$ に対して $\phi(g^{-1})=\phi(g)^{-1}$, すなわち，$g$ の逆元の ϕ による像は $\phi(g)$ の逆元である．

(iii) ϕ の値域 $\phi(\mathsf{G})=\{\phi(g)\,|\,g\in\mathsf{G}\}$ は H の部分群である．

証明 (i) $e_{\mathsf{G}}^2=e_{\mathsf{G}}$ と準同型性により，$\phi(e_{\mathsf{G}})^2=\phi(e_{\mathsf{G}})$. 両辺に左から $\phi(e_{\mathsf{G}})^{-1}$ をかければ，$\phi(e_{\mathsf{G}})=e_{\mathsf{H}}$ が出る．

(ii) $e_{\mathsf{H}}=\phi(e_{\mathsf{G}})=\phi(gg^{-1})=\phi(g)\phi(g^{-1})$ による．

(iii) 任意の $g_1,g_2\in\mathsf{G}$ に対して，$\phi(g_1)\phi(g_2)=\phi(g_1g_2)\in\phi(\mathsf{G})$. また，任意の $g\in\mathsf{G}$ に対して，(ii) によって，$\phi(g)^{-1}\in\phi(\mathsf{G})$. したがって，命題 1.18 によって $\phi(\mathsf{G})$ は H の部分群である． ■

準同型写像 $\phi:\mathsf{G}\longrightarrow\mathsf{H}$ に対して，G の部分集合

$$\ker\phi:=\{g\in\mathsf{G}\,|\,\phi(g)=e_{\mathsf{H}}\}=\phi^{-1}(\{e_{\mathsf{H}}\}) \tag{1.11}$$

(e_{H} は H の単位元) を ϕ の**核** (kernel) という．

命題 1.25 $\phi: \mathsf{G} \longrightarrow \mathsf{H}$ を準同型写像とする．このとき，次の (i), (ii) が成立する：

(i) 任意の $x \in \mathsf{G}$ と $g \in \ker\phi$ に対して，$xgx^{-1} \in \ker\phi$.

(ii) $\ker\phi$ は G の部分群である．

証明 (i) $\phi(xgx^{-1}) = \phi(x)\phi(g)\phi(x^{-1}) = \phi(x)e_{\mathsf{H}}\phi(x^{-1}) = \phi(e_{\mathsf{G}}) = e_{\mathsf{H}}$. したがって，$xgx^{-1} \in \ker\phi$.

(ii) 任意の $g \in \ker\phi$ に対して，命題 1.24 (ii) によって $g^{-1} \in \ker\phi$. また，任意の $g, h \in \ker\phi$ に対して，$\phi(gh) = \phi(g)\phi(h) = e_{\mathsf{H}}^2 = e_{\mathsf{H}}$. したがって $gh \in \ker\phi$. ■

命題 1.25 に言明された，群の準同型写像の核の性質を抽象的に取り出すことにより，ある普遍的な部分群の概念へと到ることができる：

定義 1.26 群 G の部分群 N について，任意の $x \in \mathsf{G}$ と $g \in \mathsf{N}$ に対して $xgx^{-1} \in \mathsf{N}$ が成り立つならば，N を G の**正規部分群**と呼ぶ．

群から群への準同型写像の核は正規部分群の典型的な例なのである．

例 1.27 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して，並進群 $\mathbb{R}^d$ の部分群 $k\mathbb{Z}^d$ (例 1.17) は正規部分群である ($\because$ 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ と $k\boldsymbol{n} \in k\mathbb{Z}^d$ に対して，$\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{n} + (-\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{n} \in k\mathbb{Z}^d$).

例 1.28 1 次元ユニタリ群 U(1) (例 1.22) は，集合としては，絶対値が 1 の複素数の全体，すなわち複素平面 $\mathbb{C}$ における単位円周である．したがって

$$\mathrm{U}(1) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} \tag{1.12}$$

と表される．写像 $\phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{U}(1)$ を

$$\phi(\theta) := e^{i\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

によって定義すれば，これは並進群 $\mathbb{R}$ から U(1) への準同型写像である ($\because$ 任意の $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ に対して，$\phi(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = \phi(\theta_1)\phi(\theta_2)$). U(1) の元 $e^{i\theta}$ は，複素平面上の写像としては ($\mathbb{C} \ni z \longmapsto e^{i\theta}z$)，原点のまわりの角度 θ の回転を表すことに注意しよう．容易にわかるように，$\ker\phi = 2\pi\mathbb{Z}$ である．

核の概念を用いると準同型写像の単射性を特徴づけることができる：

命題 1.29 $\phi: \mathsf{G} \longrightarrow \mathsf{H}$ を準同型写像とする．このとき ϕ が単射であるための必要十分条件は，$\ker\phi = \{e_{\mathsf{G}}\}$ となることである．

証明 (必要性) ϕ が単射であるとする．$g \in \ker\phi$ とすれば，$\phi(g)=e_{\mathsf{H}}=\phi(e_{\mathsf{G}})$ ($\because$ 命題 1.24 (i))．これと ϕ の単射性により，$g=e_{\mathsf{G}}$．ゆえに $\ker\phi=\{e_{\mathsf{G}}\}$.

(十分性) $\ker\phi=\{e_{\mathsf{G}}\}$ と仮定する．$\phi(g_1)=\phi(g_2)$ $(g_1,g_2\in\mathsf{G})$ とすると $\phi(g_1)^{-1}\phi(g_2)=e_{\mathsf{H}}$．命題 1.24 (ii) と ϕ の準同型性によって，左辺は $\phi(g_1^{-1}g_2)$ に等しい．したがって $g_1^{-1}g_2\in\ker\phi$. ゆえに $g_1^{-1}g_2=e_{\mathsf{G}}$．これは $g_2=g_1$ を意味する．よって，ϕ は単射である． ■

1.3.2 群の同型

G, H を群とする．G の H への準同型性の概念よりも強い概念を導入する：

定義 1.30 準同型写像 $\phi:\mathsf{G}\longrightarrow\mathsf{H}$ が全単射であるとき，ϕ を**同型写像** (isomorphism) と呼ぶ.

例 1.31 群 G 上の恒等写像 I_{G} は同型写像である.

次の命題は，同型写像に関する基本的な性質を述べたものである.

命題 1.32 $\mathsf{G}_1,\mathsf{G}_2,\mathsf{G}_3$ を群とする．このとき，次の (i), (ii) が成り立つ：

(i) $\phi:\mathsf{G}_1\longrightarrow\mathsf{G}_2$ および $\psi:\mathsf{G}_2\longrightarrow\mathsf{G}_3$ が同型写像ならば，これらの合成写像 $\psi\circ\phi:\mathsf{G}_1\longrightarrow\mathsf{G}_3$ $((\psi\circ\phi)(g):=\psi(\phi(g)), g\in\mathsf{G}_1)$ も同型写像である.

(ii) $\phi:\mathsf{G}_1\longrightarrow\mathsf{G}_2$ が同型写像ならば，$\phi^{-1}:\mathsf{G}_2\longrightarrow\mathsf{G}_1$ も同型写像である.

証明 (i) $\psi\circ\phi$ の全単射性は，ϕ,ψ のそれからしたがう．準同型性を示すために，$g,h\in\mathsf{G}_1$ としよう．このとき，ϕ,ψ の準同型性により

$$(\psi\circ\phi)(gh)=\psi(\phi(g)\phi(h))=\psi(\phi(g))\psi(\phi(h))=(\psi\circ\phi)(g)(\psi\circ\phi)(h).$$

したがって，$\psi\circ\phi$ は準同型である.

(ii) 任意の $h_1,h_2\in\mathsf{G}_2$ に対して $g_j=\phi^{-1}(h_j)$ $(j=1,2)$ とおくと，$\phi(g_j)=h_j$ であるから，ϕ の準同型性により $h_1h_2=\phi(g_1g_2)$．したがって，$g_1g_2=\phi^{-1}(h_1h_2)$. ゆえに，ϕ^{-1} は準同型である．ϕ^{-1} の全単射性は ϕ のそれからしたがう． ■

命題 1.32 (ii) に基づいて，次の定義が可能である：

定義 1.33 群 G から群 H への同型写像 $\phi:\mathsf{G}\longrightarrow\mathsf{H}$ が存在するとき，G と H は ϕ のもとで**同型** (isomorphic) であるという．この場合，$\mathsf{G}\overset{\phi}{\cong}\mathsf{H}$ と記す．ϕ が何であるかが文脈から明らかな場合は，単に，$\mathsf{G}\cong\mathsf{H}$ と書く場合もある.

すべての群の集まりを $\mathscr{G}$ とし，任意の $\mathsf{G}, \mathsf{H} \in \mathscr{G}$ に対して，関係「$\mathsf{G} \sim \mathsf{H}$」を「$\mathsf{G}$ から H への同型写像が存在すること (すなわち，G と H は同型)」によって定義する[*12]．このとき，例 1.31 と命題 1.32 によって，この関係 $\sim$ は $\mathscr{G}$ の同値関係であることがわかる[*13]．したがって，同型な群どうしは，広い意味で同じものとみなせる[*14]．こうして，すべての群の集まり $\mathscr{G}$ を，同型の概念を用いて類別することができる．

例 1.34 正の実数の全体 $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$ は実数の乗法に関して群になる (単位元は 1)．$\mathbb{R}$ を加群として考える．写像 $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\phi(x) := \log x$ $(x \in \mathbb{R}_+)$ によって定義する ($\log x$ は x の自然対数) と，ϕ は同型写像である．

証明 ϕ の全単射性は自然対数の性質による．任意の $x, y \in \mathbb{R}_+$ に対して，$\phi(x) + \phi(y) = \log(xy) = \phi(xy)$．したがって，$\phi$ は準同型写像である． ■

1.3.3 群の表現

1 つの群がいろいろなベクトル空間上の一般線形群の部分群として実現する構造が存在する．これが群の (線形) 表現と呼ばれる構造である：

定義 1.35 G を群とし，V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．写像 $\phi : \mathsf{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ (例 1.14) が

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \quad a, b \in \mathsf{G}$$

を満たすとき (すなわち，ϕ は G から $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ への準同型写像)，ϕ または $\phi(\mathsf{G}) = \{\phi(a) | a \in \mathsf{G}\}$ を G の V 上での**表現** (representation) という．V を表現 ϕ の**表現空間**と呼ぶ．便宜上，ϕ, V の組 (ϕ, V) を G の表現と呼ぶことが多い．

この場合，もし，ϕ が単射であるならば，表現 ϕ は**忠実**であるという．

例 1.36 G を $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ の部分群とする．写像 $\phi : \mathsf{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ を $\phi(g) := g$ $(g \in \mathsf{G})$ と定義すれば，これが G の V 上での表現であることは容易にわかる．この表現を G の**恒等表現**と呼ぶ．

[*12] 関係の概念については，付録 A，A.2 節を参照．

[*13] 任意の $\mathsf{G} \in \mathscr{G}$ に対して，$\mathsf{G} \overset{I_\mathsf{G}}{\sim} \mathsf{G}$ (反射律)，任意の $\mathsf{G}, \mathsf{H} \in \mathscr{G}$ に対して，$\mathsf{G} \overset{\phi}{\sim} \mathsf{H}$ ならば $\mathsf{H} \overset{\phi^{-1}}{\sim} \mathsf{G}$ (対称律)，$\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2, \mathsf{G}_3 \in \mathscr{G}$, $\mathsf{G}_1 \overset{\phi}{\sim} \mathsf{G}_2$, $\mathsf{G}_2 \overset{\psi}{\sim} \mathsf{G}_3$ ならば $\mathsf{G}_1 \overset{\psi \circ \phi}{\sim} \mathsf{G}_3$ (推移律)．

[*14] いうまでもなく，この同一視の仕方は，関与する同型写像に依存する．この点は注意を要する．

容易に確かめられるように，群Gの，ベクトル空間V上での任意の表現ϕについて，$\phi(\mathsf{G})=\{\phi(a)|a\in\mathsf{G}\}$はGL(V)の部分群である．したがって，群Gをベクトル空間V上に表現するということは，Gの群構造をV上の一般線形群の部分群の構造として把握するということになる．象徴的にいえば，群GのV上での表現とは，GがV上の一般線形群の部分群として，いわば“現象する”形式のことである．群の表現の例は，以下，本書を通じて，いろいろと見ていくことになる．

1.3.4 ユニタリ表現

群の表現の中で，物理学への応用において，ある特別の位置を占める表現の範疇がある．Vを$\mathbb{K}$上の計量ベクトル空間とし(不定計量でもよい)，その計量を$\langle\cdot,\cdot\rangle$で表す[*15]．

定義 1.37 Gを群とし，$\phi:\mathsf{G}\longrightarrow \mathrm{GL}(\mathsf{V})$をGの表現とする．各$g\in\mathsf{G}$に対して，$\phi(g)$が直交変換($\mathbb{K}=\mathbb{R}$の場合)またはユニタリ変換($\mathbb{K}=\mathbb{C}$の場合)であるとき(i.e., $\phi(g)$は全射で$\langle\phi(g)x,\phi(g)y\rangle=\langle x,y\rangle$ $(x,y\in\mathsf{V})$を満たす)，ϕを**ユニタリ表現**と呼ぶ．

注意 1.38 数学の文献でユニタリ表現という場合は，通常，Vがヒルベルト空間，Gが位相群(群であり，かつ位相空間で写像 : $\mathsf{G}\times\mathsf{G}\ni(a,b)\longmapsto ab^{-1}\in\mathsf{G}$が連続である集合)で$\phi$が連続である場合を指す．ここでは，若干，定義を緩めた．他の文献を読む場合には注意されたい．

例 1.39 例1.28の写像$\phi:\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{U}(1)$は並進群$\mathbb{R}$の1次元ヒルベルト空間$\mathbb{C}$上でのユニタリ表現である(U(1)の元を$\mathbb{C}$上の線形作用素と見る)．

1.3.5 群の表現の同値性

一般的にいって，群Gは2つ以上の表現を持ちうる．そこで，Gの表現を分類する概念が必要になる．その1つが，次に定義する同値性の概念である．

定義 1.40 $(\phi,\mathsf{V}),(\psi,\mathsf{W})$をGの表現とする．VからWへの全単射な線形作用素$A$が存在して，すべての$g\in\mathsf{G}$に対して

$$A\phi(g)A^{-1}=\psi(g)$$

[*15] 付録Cを参照．

が成り立つとき，(ϕ,V) は (ψ,W) に**同値**であるという．この場合，$(\phi,\mathsf{V})\overset{A}{\cong}(\psi,\mathsf{W})$ と記す．

特に，V,W がヒルベルト空間で A がユニタリ変換であるとき，(ϕ,V) と (ψ,W) は**ユニタリ同値**であるという．

注意 1.41　(i) $(\phi,\mathsf{V})\overset{A}{\cong}(\psi,\mathsf{W})$ ならば $(\psi,\mathsf{W})\overset{A^{-1}}{\cong}(\phi,\mathsf{V})$ であるから，(ψ,W) は (ϕ,V) に同値である，この事実に基づいて，$(\phi,\mathsf{V})\overset{A}{\cong}(\psi,\mathsf{W})$ のとき，(ϕ,V) と (ψ,W) は**同値**であるという．

(ii) 群 G の 2 つの表現 $(\phi,\mathsf{V}),(\psi,\mathsf{W})$ が同値であることを「$(\phi,\mathsf{V})\sim(\psi,\mathsf{W})$」と記すと，この関係 $\sim$ は，G の表現全体の集まり $\mathscr{R}(\mathsf{G})$ における同値関係である[*16]．したがって，$\mathscr{R}(\mathsf{G})$ は，同値な表現からなる同値類に類別される．群の表現の同値性は，表現の同一性の弱められた概念であり，表現空間の個別的な特性に依存しない，本質的・普遍的特性を捉えるための概念である．同値な表現どうしは，この本質的・普遍的特性においては同一であると見るのである．もう少し平たくいうならば，表現の同値性とは，“外見” (表現空間) は異なっても，いろいろな “外見” のいわば “根底” を貫く普遍的な内容を捉えるための概念の 1 つなのである．

1.4　変換群

この節では，群の理念が具体的に実現される一般的な写像の範疇を導入する．

X を空でない集合とし，X 上の写像の全体を $\mathscr{M}(\mathsf{X})$ と記す：

$$\mathscr{M}(\mathsf{X}) := \{f \mid f \text{ は } \mathsf{X} \text{ から } \mathsf{X} \text{ への写像}\}. \tag{1.13}$$

任意の $f,g\in\mathscr{M}(\mathsf{X})$ に対して，$fg\in\mathscr{M}(\mathsf{X})$ を

$$fg := f\circ g \tag{1.14}$$

(合成写像，i.e.，$(f\circ g)(x) := f(g(x))$ $(x\in\mathsf{X})$) によって定義し，写像 f と写像 g の**積**と呼ぶ．

X 上の全単射な写像を X 上の**変換**と呼び，X 上の変換の全体を $\mathscr{G}(\mathsf{X})$ で表す[*17]：

[*16] 証明は，群の同型の概念が群全体の集まりにおける同値関係を与えることの証明と同様 (定義 1.33 のすぐ後の記述を参照)．

[*17] 文献によっては，単に X 上の写像を「X 上の変換」と呼ぶ場合もある．他の文献を参照する場合には，注意されたい．

$$\mathscr{G}(\mathsf{X}) := \{f \in \mathscr{M}(\mathsf{X}) \mid f \text{ は全単射 }\}. \tag{1.15}$$

次の事実は基本的である：

命題 1.42 (i) 任意の $f, g \in \mathscr{G}(\mathsf{X})$ に対して，$fg \in \mathscr{G}(\mathsf{X})$.

(ii) 任意の $f \in \mathscr{G}(\mathsf{X})$ に対して $f^{-1} \in \mathscr{G}(\mathsf{X})$.

証明 (i) fg の単射性を示すために，$(fg)(x) = (fg)(y)$ $(x, y \in \mathsf{X})$ としよう．このとき $f(g(x)) = f(g(y))$. これと f の単射性により，$g(x) = g(y)$. g は単射であるから $x = y$. ゆえに fg は単射である．次に，fg の全射性を示すために，$y \in \mathsf{X}$ を任意にとる．f の全射性により，$y = f(x)$ となる $x \in \mathsf{X}$ がある．g の全射性により，$x = g(w)$ となる $w \in \mathsf{X}$ がある．したがって $y = (fg)(w)$. ゆえに fg は全射である．

(ii) これは逆写像の定義から明らか. ■

定理 1.43 $\mathscr{G}(\mathsf{X})$ は写像の積演算に関して群をなす．この場合，単位元は X 上の恒等写像 I_{X} であり，$f \in \mathscr{G}(\mathsf{X})$ の逆元は，f の逆写像 f^{-1} である．

証明 写像の積演算が結合法則を満たすことは容易にわかる．X 上の恒等写像 I_{X} は全単射であるから，$\mathscr{G}(\mathsf{X})$ の元である．これらの事実と命題 1.42 により，題意がしたがう． ■

群 $\mathscr{G}(\mathsf{X})$ を **X 上の全変換群** (full transformation group) と呼ぶ．

$\mathscr{G}(\mathsf{X})$ の部分群を X 上の 1 つの**変換群**という．この場合，X を**変換群の作用空間**と呼ぶ．

変換群が持ちうる重要な特性の 1 つを定義しておこう：

定義 1.44 $\mathscr{T}$ を X 上の変換群とする．

(i) X の各元 $x, y \in \mathsf{X}$ に対して，$f_{xy} \in \mathscr{T}$ が存在して $f_{xy}(x) = y$ が成り立つならば，$\mathscr{T}$ は**推移的**であるという．

(ii) X の部分集合 D の各元 $x, y \in \mathsf{D}$ に対して，$f_{xy} \in \mathscr{T}$ が存在して $f_{xy}(x) = y$ が成り立つならば，$\mathscr{T}$ は D 上で**推移的**であるという．

例 1.45 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{N}_n := \{1, \cdots, n\}$ とおき，$\mathsf{X} = \mathbb{N}_n$ の場合を考える．$\mathbb{N}_n$ 上の全単射 (変換) $\sigma : \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}_n; \mathbb{N}_n \ni i \longmapsto \sigma(i) \in \mathbb{N}_n$ は $1, \cdots, n$ の**置換**と呼ばれる．$1, \cdots, n$ の置換の全体

$$\mathfrak{S}_n := \mathscr{G}(\mathbb{N}_n) \tag{1.16}$$

は $\mathbb{N}_n$ 上の変換群であり，n **次の置換群**または n **次の対称群**と呼ばれる[*18]．この群は，推移的である．実際，任意の $j,k\in\mathbb{N}_n$ $(j\neq k)$ に対して，j と k を入れ換える変換，すなわち，互換を σ_{jk} とすれば，$\sigma_{jk}(j)=k, \sigma_{jk}(k)=j$ である．

例 1.46 V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，各 $a\in\mathsf{V}$ に対して，$T_a:\mathsf{V}\longrightarrow\mathsf{V}$ を

$$T_a(u):=u+a,\quad u\in\mathsf{V} \tag{1.17}$$

によって定義する．写像 T_a を**ベクトル** a **による並進** (translation) と呼ぶ．これは，幾何学的描像としては，V のすべてのベクトルをいっせいにベクトル a だけ "ずらす" 操作を表す．容易にわかるように，$T_0=I_{\mathsf{V}}$ であり

$$T_aT_b=T_bT_a=T_{a+b},\quad a,b\in\mathsf{V}. \tag{1.18}$$

したがって，特に $T_aT_{-a}=T_{-a}T_a=I_{\mathsf{V}}$．ゆえに，$T_a$ は全単射であり，$T_a^{-1}=T_{-a}$ が成り立つ．これらの事実によって

$$\mathscr{T}_{\mathsf{V}}:=\{T_a|a\in\mathsf{V}\} \tag{1.19}$$

は V 上の変換群である．これを V 上の**並進群** (translation group) という．この群も推移的である ($\because$ 任意の $x,y\in\mathsf{V}$ に対して $a=y-x$ とおけば，$T_a(x)=y$)．

写像 $\rho:\mathsf{V}\longrightarrow\mathscr{T}_{\mathsf{V}}$ を

$$\rho(a):=T_a,\quad a\in\mathsf{V}$$

によって定義すれば，ρ は加群としての V の V 上での忠実な表現であり，群同型であることがわかる[*19]：$\mathsf{V}\overset{\rho}{\cong}\mathscr{T}_{\mathsf{V}}$．この意味で，しばしば，$\mathsf{V}\cong\mathscr{T}_{\mathsf{V}}$ あるいは $\mathsf{V}=\mathscr{T}_{\mathsf{V}}$ と書かれる．

具体例 $\mathscr{T}_{\mathbb{R}^n}\cong\mathbb{R}^n$ (実並進群), $\mathscr{T}_{\mathbb{C}^n}\cong\mathbb{C}^n$ (複素並進群).

例 1.47 $f\in\mathscr{G}(\mathsf{X})$ とし，

$$\mathsf{G}_f:=\{f^n|n\in\mathbb{Z}\} \tag{1.20}$$

とする．ただし，$f^0:=I_{\mathsf{X}}$．このとき G_f は X 上の変換群である[*20]．この変換群は推移的であるとは限らない．

[*18] 後者の命名の意については，次の節の定義 1.56，定理 1.58 を参照.

[*19] (1.18) によって，$\rho(a+b)=\rho(a)\rho(b)$ $(a,b\in\mathsf{V})$．したがって，ρ は準同型である．ρ が全射であることは明らかであろう．ρ の単射性を示すために，$\rho(a)=\rho(b)$ $(a,b\in\mathsf{V})$ とすれば，すべての $u\in\mathsf{V}$ に対して $u+a=u+b$．したがって，$a=b$．ゆえに，ρ は単射である．

[*20] 命題 1.18 または系 1.19 の条件を検証せよ．

例 1.48 (i) 任意の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に対して，V 上の一般線形群 GL(V) (例 1.14) およびその任意の部分群は V 上の変換群である．V が有限次元ならば，変換群 GL(V) は $\mathsf{V}\setminus\{0\}$ 上で推移的である (問題 7).

(ii) $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の変換群であり，$\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の変換群である．ところで，n 次の正方行列 $M=(M_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}\in\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ に対して写像 $\hat{M}:\mathbb{K}^n\longrightarrow\mathbb{K}^n$ を

$$(\hat{M}\boldsymbol{x})_i:=\sum_{j=1}^n M_{ij}x_j,\quad \boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{K}^n \tag{1.21}$$

によって定義すれば，$\hat{M}$ は線形である．また，$\hat{M}$ が全単射であるための必要十分条件は，行列 M が正則であること (i.e.，$M\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$) である．そこで，写像 ρ: $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})\longrightarrow\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ を

$$\rho(M):=\hat{M} \tag{1.22}$$

によって定義すれば，これは同型写像であることがわかる (問題 8)．したがって，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ は $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ と同型である．この同型対応の意味において，行列成分が $\mathbb{K}$ の元で与えられる，任意の行列群は，$\mathbb{K}^n$ 上の変換群と見ることができる．以後，しばしば，この同一視を用いる．

例 1.49 V を任意の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．各 $t>0$ に対して，写像 $D_t:\mathsf{V}\longrightarrow\mathsf{V}$ を

$$D_t(x):=tx,\quad x\in\mathsf{V} \tag{1.23}$$

によって定義する．容易にわかるように，D_t は同型写像 (全単射かつ線形な写像) であり

$$D_t^{-1}=D_{1/t} \tag{1.24}$$

が成り立つ．したがって，$D_t\in\mathrm{GL}(\mathsf{V})$. D_t を**倍率 t の伸張変換**という．次の関係式を確かめるのも容易である：

$$D_tD_s=D_{ts},\quad s,t>0. \tag{1.25}$$

これを用いると，伸張変換の全体

$$\mathrm{D}(\mathsf{V}):=\{D_t\,|\,t>0\} \tag{1.26}$$

は GL(V) の部分群をなすことがわかる．D(V) を **V 上の伸張変換群**と呼ぶ．

例 1.50 V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間とする (正値計量とは限らない)．V が実計量ベクトル空間の場合，V 上の直交変換の全体を O(V) という記号で表す (1.3.4 節を参照)：

$$\mathrm{O(V)} := \{O \in \mathsf{L(V)} \,|\, O \text{ は直交変換 }\}. \tag{1.27}$$

また，V が複素計量ベクトル空間の場合，V 上のユニタリ変換の全体を U(V) と記す：

$$\mathrm{U(V)} := \{U \in \mathsf{L(V)} \,|\, U \text{ はユニタリ変換 }\}. \tag{1.28}$$

O(V), U(V) はいずれも V 上の変換群である．

証明 V の計量を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表す．上述のことから，$\mathrm{O(V)} \subset \mathrm{GL(V)}$ は明らか．$S, T \in \mathrm{O(V)}$ とすれば，ST は全射であり，任意の $x, y \in \mathsf{V}$ に対して $\langle (ST)x, (ST)y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$. したがって，$ST \in \mathrm{O(V)}$. また，$x' = T^{-1}x, y' = T^{-1}y$ とおけば $\langle x', y'\rangle = \langle Tx', Ty'\rangle$. だが，$Tx' = x, Ty' = y$. したがって $T^{-1} \in \mathrm{O(V)}$. よって，O(V) は GL(V) の部分群である．U(V) についても同様. ■

変換群 O(V) を **V 上の直交変換群** (または単に**直交群**) あるいは**広義回転群**，変換群 U(V) を **V 上のユニタリ変換群**または**ユニタリ群**という．

V 上の直交群やユニタリ群は，それぞれ，変換群としての n 次直交群 $\mathrm{O}(n) \cong \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ (例 1.48 (ii) の応用) や n 次元ユニタリ群 $\mathrm{U}(n) \cong \mathrm{U}(\mathbb{C}^n)$ をその特殊例とするような普遍的な変換群の範疇の 1 つを形成するものである．

例 1.51 V を n 次元ユークリッドベクトル空間 (n 次元実内積空間) とする．このとき，V 上の線形作用素 T に対して，行列式 $\det T$ が定義される (付録 B, B.2.3 項を参照)．$E = \{e_i\}_{i=1}^n$ を V の正規直交基底とし，E に関する T の行列表示を $T_E = (T^i_j)$ とすれば，T_E は直交行列である*21．したがって，$\det T = \det T_E = \pm 1$. そこで

$$\mathrm{SO(V)} := \{T \in \mathrm{O(V)} \,|\, \det T = 1\} \tag{1.29}$$

---

*21 ∵ 任意の $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i, y = \sum_{i=1}^n y^i e_i$ に対して，

$$\sum_{i=1}^n x^i y^i = \langle x, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \sum_{i,j,k=1}^n T^i_j T^i_k x^j y^k.$$

したがって，$\sum_{i=1}^n T^i_j T^i_k = \delta_{jk}$. これは ${}^{\mathrm{t}}T_E T_E = I_n, T_E{}^{\mathrm{t}}T_E = I_n$ を意味する．

を考えると，これは O(V) の部分群であることがわかる[*22]．SO(V) を V 上の**特殊直交群**または**回転群**と呼ぶ．

O($\mathbb{R}^n$) の場合と同様，SO($\mathbb{R}^n$) (V $=\mathbb{R}^n$ の場合の SO(V)) は SO(n) と同型である．

例 1.52 V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．ベクトル $a\in$ V と $L\in$ GL(V) を用いて

$$A(x):=a+L(x),\quad x\in \mathsf{V} \tag{1.30}$$

という形に表される写像 $A:\mathsf{V}\longrightarrow\mathsf{V}$ を V 上の**アファイン変換**と呼ぶ．

V 上のアファイン変換 A は全単射である．実際，$B(x):=L^{-1}(x-a)$ ($x\in$ V) によって，写像 $B:\mathsf{V}\longrightarrow\mathsf{V}$ を定義すれば，$AB=BA=I_{\mathsf{V}}$ が成り立つことがわかる．したがって，A は全単射であり，$B=A^{-1}$．ゆえに

$$A^{-1}(x)=L^{-1}(x-a)=-L^{-1}a+L^{-1}x,\quad x\in\mathsf{V} \tag{1.31}$$

が成り立つ．

V 上のアファイン変換の全体

$$\mathrm{Af}(\mathsf{V}):=\{A:\mathsf{V}\longrightarrow\mathsf{V}\,|\,A\text{ はアファイン変換}\} \tag{1.32}$$

は変換群である．

証明 $A_1,A_2\in\mathrm{Af}(\mathsf{V})$ とすれば，$A_j(x)=a_j+L_j(x)$ ($x\in$ V) と書ける ($a_j\in\mathsf{V}, L_j\in$ GL(V))．したがって

$$(A_1A_2)(x)=a_1+L_1a_2+(L_1L_2)(x),\quad x\in\mathsf{V}.$$

$a_1+L_1a_2\in\mathsf{V}, L_1L_2\in\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ であるから，$A_1A_2\in\mathrm{Af}(\mathsf{V})$ である．また，$A\in\mathrm{Af}(\mathsf{V})$ ならば，(1.31) により，$A^{-1}\in\mathrm{Af}(\mathsf{V})$． ■

変換群 Af(V) を V 上の**アファイン変換群**と呼ぶ．アファイン変換群は，部分群として並進群 $\mathscr{T}_{\mathsf{V}}$ と GL(V) を含む．したがって，特にアファイン変換群は推移的である．

例 1.53 各 $t\in\mathbb{R}$ に対して，X 上の全単射 (変換) $\phi_t:\mathsf{X}\longrightarrow\mathsf{X}$ で次の性質を満たすものが与えられているとする：すべての $t,s\in\mathbb{R}$ に対して，$\phi_t\phi_s=\phi_{t+s}$．このとき，写像の集合 $\mathsf{F}:=\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は X 上の変換群である．

証明 $\phi_t\phi_s\in\mathsf{F}$ ($s,t\in\mathbb{R}$) は定義から明らか．$\phi_0\phi_0=\phi_0$ であり ϕ_0 は全単射だから，$\phi_0=I_{\mathsf{X}}$．すると，$\phi_t\phi_{-t}=\phi_{-t}\phi_t=\phi_0=I_{\mathsf{X}}$ であるから，$\phi_t^{-1}=\phi_{-t}\in\mathsf{F}$． ■

---

*22 行列式の性質 (付録 B の定理 B.8) を用いよ．

変換群 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を X 上の **1 パラメータ (助変数) 変換群**という．

例 1.54 行列の列 $A_k = ((A_k)_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ $(k=1,2,\cdots)$ について，行列 $A=(A_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ があって

$$\lim_{k\to\infty}(A_k)_{ij} = A_{ij}, \quad i,j=1,\cdots,n$$

が成り立つとき，$\{A_k\}_k$ は A に**収束する**といい，これを記号的に $\lim_{k\to\infty} A_k = A$ と記す．k が連続パラメータ $t\in\mathbb{R}$ の場合も同様である．

任意に 2 つの行列 $A=(A_{ij}), B=(B_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ をとる．$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$ であるから，和に関するコーシー–シュヴァルツの不等式により

$$|(AB)_{ij}| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|A_{ik}|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|B_{kj}|^2}.$$

そこで，$M_A := \max_{i,j=1,\cdots,n}|A_{ij}|$ とおけば $|(AB)_{ij}| \le nM_AM_B$．したがって，$M_{AB} \le nM_AM_B$．ゆえに，任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$M_{A^k} \le nM_{A^{k-1}}M_A \le n^2M_{A^{k-2}}M_A^2 \le \cdots \le n^kM_A^k.$$

特に $|(A^k)_{ij}| \le n^kM_A^k$．したがって，任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して $\sum_{k=0}^{N}|(A^k)_{ij}|/k! \le e^{nM_A}$ であるから，$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}|(A^k)_{ij}|$ は存在する ($\because$ 上に有界な正数列は収束する (定理))．すると，$a_{ij} := \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}(A^k)_{ij}/k!$ も収束することがわかる ($\because$ $S_N := \sum_{k=0}^{N}(A^k)_{ij}/k!$ によって定義される数列 $\{S_N\}_N$ はコーシー列をなす)．a_{ij} を (i,j) 成分とする行列を記号的に e^A または $\exp(A)$ で表す：

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} := \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}. \tag{1.33}$$

対応：$A \longmapsto e^A$ を**行列の指数関数**という．定義から，$e^{-A}e^A = e^Ae^{-A} = I_n$ を示すことは難しくない[*23]．したがって，e^A は $\mathbb{K}^n$ 上の線形作用素として全単射であり，$(e^A)^{-1} = e^{-A}$ が成り立つ．そこで，各 $t\in\mathbb{R}$ に対して，$\phi_t := e^{tA} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$

[*23] $(e^{-A}e^A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(e^{-A})_{ik}(e^A)_{kj}$ の右辺に (1.33) を代入し，k について和をとれば

$$\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(A^N)_{ij}}{N!}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{N!}{n!(N-n)!} = \delta_{ij}$$

が得られる．

とおけば，$\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は $\mathbb{K}^n$ 上の 1 パラメータ変換群であることがわかる[*24]．これを行列 A から生成される **1 パラメータ変換群**と呼び，A をその**生成子**という．

e^A のエルミート共役については

$$(e^A)^* = e^{A^*} \tag{1.34}$$

が成り立つ ($\because\ (e^A)^* = \sum_{n=0}^{\infty}(A^n)^*/n! = \sum_{n=0}^{\infty}(A^*)^n/n! = e^{A^*}$).

例 1.55 V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間とする．V 上の全単射な写像 C が V 上の任意の 2 点間の計量を保存するとき，すなわち，任意の $x,y\in$ V に対して $\langle C(x)-C(y), C(x)-C(y)\rangle = \langle x-y, x-y\rangle$ が成り立つとき，C を**合同写像**または**合同変換**と呼ぶ．

たとえば，V 上の並進，直交変換 ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ の場合) あるいはユニタリ変換 ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合) は合同変換である．

V 上の合同変換の全体は，V 上の変換群である．この変換群を V 上の**合同変換群**と呼ぶ．

1.5　集合の対称性

序章で述べたように，対称性の理念の現れの基本的な相は，自然界や文化世界における物の形態のうちに見い出される．ところで，物の形態は，数学的には，しかるべき集合 (空間) の部分集合としてとらえられる．したがって，対称性の理念を数学的に考察するにあたっては，まず，集合に関する対称性からはじめるのが自然である．

物がそこに存在する空間の抽象化として，任意の空でない集合 X を考える．幾何学的な描像との対応を考慮するとき，X の元 (要素) を，しばしば，**点**ともいうことにする．また，n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ の図形の概念の抽象化として，X の空でない部分集合を X の**図形**と呼ぶ．ところで，X 上の全単射な写像は，X の図形がいかなる "形" をしていようとも，また，X 内の "どこ" にあろうとも，その図形を構成している点全体を 1 対 1 に写す．したがって，それは，図形に対する空間的な操作を記述する普遍的な概念の 1 つとみることが可能である．序章で発見法的に指摘しておいたように，物の対称性は，直観的には，その物の 1 つまたは複数の空

[*24] 前脚注と同様にして，$(e^{tA}e^{sA})_{ij} = (e^{(t+s)A})_{ij}$ $(t,s\in\mathbb{R}, i,j=1,\cdots,n)$ が示される．

間的操作に対する不変性としてとらえられる．これらの考察によって対称性の普遍的理念に関して，次の定義へと導かれる：

定義 1.56 X の図形 D に対して，$f(\mathsf{D}) := \{f(x) | x \in \mathsf{D}\}$ とする (D の f による像)．ある $f \in \mathscr{G}(\mathsf{X})$ があって，$f(\mathsf{D}) = \mathsf{D}$ が成り立つとき (i.e., D は変換 f のもとで，集合全体としては変わらないということ)，D は f に**関して対称である**，あるいは，f **対称**である，または f **不変**である，という．この場合，D は f **対称性**を持つという．

次の命題は，X 上の各変換 $f \in \mathscr{G}(\mathsf{X})$ に対して，X の任意の空でない部分集合から f 対称な図形が構成される普遍的な構造の1つを示す：

命題 1.57 $f \in \mathscr{G}(\mathsf{X})$, F を X の任意の空でない部分集合とする．このとき，X の部分集合

$$\mathsf{F}_f := \{f^n(x) | n \in \mathbb{Z}, x \in \mathsf{F}\} \tag{1.35}$$

は f 対称である．

証明 $f(\mathsf{F}_f) \subset \mathsf{F}_f$ は明らかであろう．逆の包含関係を示すために，y を F_f の任意の点とする．このとき，整数 n と $x \in \mathsf{F}$ があって $y = f^n(x)$ と書ける．そこで，$z = f^{n-1}(x)$ とおけば，$z \in \mathsf{F}_f, y = f(z)$ が成り立つので，$y \in f(\mathsf{F}_f)$ である．したがって，$\mathsf{F}_f \subset f(\mathsf{F}_f)$. ■

この命題は，与えられた変換に関して対称な図形を構成する際に有用である．

図形 D がそれに関して対称となる全単射な写像は一般には複数ありうる．そこで，そのような写像の全体

$$\mathfrak{S}(\mathsf{D}) := \{f \in \mathscr{G}(\mathsf{X}) | f(\mathsf{D}) = \mathsf{D}\} \tag{1.36}$$

を考えるのは自然である．$I_{\mathsf{X}} \in \mathfrak{S}(\mathsf{D})$ であるので，$\mathfrak{S}(\mathsf{D})$ は空ではない．これに関して次の定理が成り立つ：

定理 1.58 $\mathfrak{S}(\mathsf{D})$ は X 上の変換群である．

証明 $f, g \in \mathfrak{S}(\mathsf{D})$ とすれば $fg \in \mathscr{G}(\mathsf{X})$ であり，$g(\mathsf{D}) = \mathsf{D}$ であるから，$f(g(\mathsf{D})) = f(\mathsf{D}) = \mathsf{D}$. したがって，$fg \in \mathfrak{S}(\mathsf{D})$. また，$f(\mathsf{D}) = \mathsf{D}$ ならば $f^{-1}(f(\mathsf{D})) = f^{-1}(\mathsf{D})$. 一方，左辺は D に等しい．したがって，$f^{-1} \in \mathfrak{S}(\mathsf{D})$. ゆえに，命題 1.18 によって題意が成立する． ■

変換群 $\mathfrak{S}$(D) を D の**全対称群** (full symmetry group) と呼ぶ．こうして，図形の対称性と群の関わりが明らかになる

与えられた図形の全対称群を求めることは一般には容易ではない．だが，その一部分を求めることが可能な場合がある．この観点から，次の定義を設ける．

定義 1.59 X 上のある変換群 $\mathscr{T}$ があって，すべての $f \in \mathscr{T}$ に対して D が f 対称であるとき，D は，**変換群 $\mathscr{T}$ に関して対称である**，あるいは **$\mathscr{T}$ 対称**である，または，**$\mathscr{T}$ 不変である**という．この場合，D は **$\mathscr{T}$ 対称性**を持つといい，$\mathscr{T}$ を D の**対称性の群**と呼ぶ．

明らかに，D の対称性の群は D の全対称群 $\mathfrak{S}$(D) の部分群である．逆に，$\mathfrak{S}$(D) の任意の部分群は D の対称性の群である．したがって，D は，$\mathfrak{S}$(D) の部分群の数だけ対称性の群を有する．

注意 1.60 (i) D が f 対称性を持つということは，例 1.47 によって，変換群の言葉でいえば，それが G_f 対称性を持つことと同値である．

(ii) 集合 X は，X 上のすべての変換群 $\mathscr{T}$ に対して，自明的に $\mathscr{T}$ 対称である．したがって，対称性について語る場合，実質的な意味を持つのは，X の真部分集合に関してだけである．

次の命題は，X 上の任意の変換群 $\mathscr{T}$ と X の任意の空でない部分集合 F に対して，F から $\mathscr{T}$ 対称な図形が構成される普遍的構造の 1 つを示す：

命題 1.61 $\mathscr{T}$ を X 上の変換群とし，F を X の任意の空でない部分集合とする．このとき，部分集合

$$\mathsf{F}_{\mathscr{T}} := \{(f_1 \cdots f_n)(x) \,|\, n \in \mathbb{N}, f_i \in \mathscr{T} \ (i = 1, \cdots, n), x \in \mathsf{F}\} \tag{1.37}$$

は $\mathscr{T}$ 対称である．

証明 任意の $f \in \mathscr{T}$ に対して，$f(\mathsf{F}_{\mathscr{T}}) \subset \mathsf{F}_{\mathscr{T}}$ は明らかであろう．逆の包含関係を示すために，y を $\mathsf{F}_{\mathscr{T}}$ の任意の元とすれば，$y = (f_1 \cdots f_n)(x)$ となる $f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{T}$ と $x \in \mathsf{F}$ がある．そこで $z = f^{-1}(y)$ とすれば，$z \in \mathsf{F}_{\mathscr{T}}$ であり，$y = f(z) \in f(\mathsf{F}_{\mathscr{T}})$． ■

定義 1.59 の観点からは，X 上の変換群を 1 つ指定するごとに，変換群の作用空間の図形に関して，1 つの対称性が定義されることになる．こうして，図形に関する対称性の普遍的本質が明らかにされるとともに，X が無限集合の場合，無限に

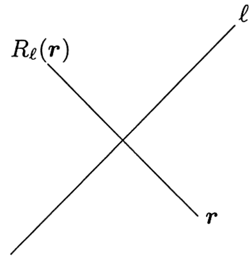


図 1.2　直線 ℓ に関する鏡映変換.

多様な対称性の存在が示唆される*25.

以下の諸例によって示唆されるように，ここに定義した対称性の概念は，ユークリッド空間におけるよく知られた幾何学的図形が有する種々の対称性を抽象的な水準において統一するものである.

例 1.62　$\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^2=\{\boldsymbol{r}=(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}^2\}$ (2 次元ユークリッドベクトル空間として考える) を任意に与えられた零でないベクトルとする. $\mathbb{R}^2$ において，その方程式が $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}\rangle=c$ (これは，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ とすれば，$a_1x+a_2y=c$ ということ)) によって与えられる直線 $\ell:=\{\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^2\,|\,\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}\rangle=c\}$ を考える. 写像 $R_\ell:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ を

$$R_\ell(\boldsymbol{r}):=\boldsymbol{r}-\frac{2(\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}\rangle-c)}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^2 \tag{1.38}$$

によって定義し ($|\boldsymbol{r}|:=\sqrt{x^2+y^2},\boldsymbol{r}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$)，これを**直線 ℓ に関する鏡映変換**と呼ぶ. これは，描像的には，$\mathbb{R}^2$ の任意の点を，直線 ℓ に関して，これと左右対称となる点に写す写像である (図 1.2 を参照)*26.

直接計算により，$R_\ell^2=I_{\mathbb{R}^2}$ を示すことができる. したがって，R_ℓ は全単射であり，$R_\ell^{-1}=R_\ell$ である. ゆえに，$\{I_{\mathbb{R}^2},R_\ell\}$ は $\mathbb{R}^2$ 上の変換群をなす. これを**直線 ℓ に関する鏡映変換群**と呼ぶ. この変換群について対称な，$\mathbb{R}^2$ の図形 D を**直線 ℓ に関して鏡映対称**あるいは**左右対称**な図形と呼ぶ.

---

*25 X が n 個の元からなる有限集合 $\mathsf{X}=\{a_1,\cdots,a_n\}$ $(a_i\neq a_j, i\neq j)$ ならば，$\mathscr{G}(\mathsf{X})$ の元 $(a_1,\cdots,a_n$ の置換) の個数は $n!$ であるので (つまり，$\mathscr{G}(\mathsf{X})$ は有限群)，X の任意の図形の対称性の群は有限個しかない.

*26 この写像の導出については，拙著『対称性の数理』(日本評論社，1993) の p.51〜p.54 を参照.

具体例

(i) 正 3 角形は，任意の頂点と中心を通る直線に関して鏡映対称である．

(ii) 正方形 (正 4 角形) は，任意の辺の中点と中心を通る直線に関して鏡映対称である．また，2 つの対角線のそれぞれに関しても鏡映対称である．

(iii) 任意の $n \geq 3$ ($n \in \mathbb{N}$) に対して，正 n 角形は，任意の頂点と中心を通る直線に関して鏡映対称である．

(iv) 任意の正 $2n$ 角形 ($n \geq 2$) は，任意の辺の中点と中心を通る直線に関して鏡映対称である．また，それは，各頂点と中心を通る直線に関しても鏡映対称である．

(v) 任意の正 $(2n+1)$ 角形 ($n \geq 1$) は，任意の頂点と中心を通る直線に関して鏡映対称である．

(vi) 円周および円の内部は，中心を通る任意の直線に関して鏡映対称である．

例 1.63 d 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^d$ において，ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ による並進 $T_{\boldsymbol{a}} \in \mathscr{T}_{\mathbb{R}^d}$ を考える．$T_{\boldsymbol{a}}$ 対称な部分集合をベクトル $\boldsymbol{a}$ に関して**並進対称な図形**と呼ぶ．

具体例

(i) $\{n\boldsymbol{a} | n \in \mathbb{Z}\}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ に関して並進対称な図形である．

(ii) $\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_d \in \mathbb{R}^d$ を線形独立なベクトルとし

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_d} := \left\{ \boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{d} n_j \boldsymbol{t}_j \,\middle|\, n_j \in \mathbb{Z}\ (j = 1, \cdots, d) \right\}$$

という部分集合を考える．この型の部分集合を**格子空間**と呼ぶ．$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_d}$ はベクトル $\boldsymbol{t}_j$ $(j = 1, \cdots, d)$ に関して並進対称な図形である．

3 次元格子空間 $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3}$ は**ブラベ格子空間**と呼ばれ，結晶の幾何学的対称性を記述するのに用いられる．結晶の可能な構造は，ブラベ格子空間の対称性の群によって分類される*27.

ベクトル $\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_d$ の典型的な例の 1 つは，ε を正の定数，$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_d$ を $\mathbb{R}^d$ の標準基底 (付録 B, 例 B.7 を参照) とするとき，$\boldsymbol{t}_j = \varepsilon \boldsymbol{e}_j$ $(j = 1, \cdots, d)$ で与えられる．この場合の格子空間

$$\mathbb{Z}_\varepsilon^d := \{\boldsymbol{x} = \varepsilon(n_1, n_2, \cdots, n_d) | n_j \in \mathbb{Z}_j\ (j = 1, \cdots, d)\} = \varepsilon \mathbb{Z}^d$$

を**格子間隔が ε の立方格子空間**という．

---

*27 たとえば，キッテル『第 4 版 固体物理学入門上』(宇野良清・津屋 昇・森田 章・山下次郎 共訳)，丸善，1974 の第 1 章を参照．

例 1.64 複素平面上の原点のまわりの角度 $\theta\in\mathbb{R}$ の回転 $e^{i\theta}$ は，$\mathbb{R}^2$ 上では行列

$$R(\theta):=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{1.39}$$

によって表される*28．容易にわかるように，$R(\theta)$ は 2 次元回転群 SO(2) の元である．逆に，SO(2) の任意の元は，$R(\theta)$ の形に表される (問題 9).

$\theta_0\in[0,2\pi)$ とする．図形 $\mathsf{D}\subset\mathbb{R}^2$ が原点のまわりに角度 θ_0 の回転をしても全体として変わらないとき，すなわち，$R(\theta_0)$ 対称であるとき，D は**原点に関して，角度 θ_0 の回転対称性を持つ**という．

ベクトル $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^2$ があって，$\mathsf{D}-\boldsymbol{a}:=\{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\,|\,\boldsymbol{x}\in\mathsf{D}\}$ が，原点に関して，角度 θ_0 の回転対称性を持つとき，D は，**点 $\boldsymbol{a}$ に関して，角度 θ_0 の回転対称性を持つ**という．この型の図形を，総称的に，**角度 θ_0 の回転対称性を持つ図形**と呼ぶ．

具体例

(i) 2 次元ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ における正 n 角形は，その中心に関して，角度 $2\pi k/n$ $(k=1,\cdots,n-1)$ の回転対称性を持つ．

SO(2) の部分集合

$$R_n:=\{R(2\pi k/n)\,|\,k=0,1,\cdots,n-1\}$$

は SO(2) の部分群をなす．上の事実により，正 n 角形は R_n 対称である．R_n と正 n 角形群 P_n (例 1.12) は同型である ($\because$ 写像 $\phi:R_n\longrightarrow\mathsf{P}_n$ を $\phi(R(2\pi k/n))=e^{i2\pi k/n}$ によって定義すれば，これは同型写像).

(ii) $\mathbb{R}^2$ における円周および円の内部は，その中心に関して，任意の角度の回転対称性を持つ ($\because$ 任意の $\theta\in\mathbb{R}$ に対して，$|R(\theta)\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}|$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2)$).

(iii) R_1,R_2 は正の定数で $R_1<R_2$ を満たすものとする．**円環領域** $\mathsf{A}=\{\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^2\,|\,R_1<|\boldsymbol{r}|<R_2\}$ は，原点に関して，任意の角度の回転対称性を持つ ($\because$ $\mathsf{A}=\bigcup_{R_1<r<R_2}\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2\,|\,|\boldsymbol{x}|=r\}$ に注意).

例 1.65 $\mathbb{R}^d$ $(d\geq 2)$ の SO(d) 不変な部分集合を**原点に関して回転対称 (不変)** な図形という．

---

*28 $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R}), z'=x'+iy'=e^{i\theta}z$ とすれば，$x'=x\cos\theta-y\sin\theta, y'=x\sin\theta+y\cos\theta$ ($e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ に注意)．したがって，$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=R(\theta)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

具体例

(i) $\mathbb{R}^d$ の原点を中心とする半径 r の $(d-1)$ 次元球面 $S_r := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, |\boldsymbol{x}| = r\}$ ($d=2$ の場合は円周) は原点に関して回転対称である ($\because$ 任意の $T \in \mathrm{SO}(d)$ に対して，$|T\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$ ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$))．ただし $|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

(ii) R_1, R_2 は正の定数で $R_1 < R_2$ を満たすものとする．集合 $\mathsf{B} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, R_1 < |\boldsymbol{x}| < R_2\}$ は原点に関して回転対称である ($\because$ $\mathsf{B} = \bigcup_{R_1 < r < R_2} S_r$ に注意).

1.6 写像の対称性

この節では，写像の対称性について考察する．まず，写像の基本的な範疇の 1 つであるスカラー値関数の対称性について叙述し，そのあとで一般のベクトル値関数の対称性について簡単にふれる．

1.6.1 スカラー値関数の対称性

X を空でない集合とし，X 上のスカラー値関数，すなわち，X から $\mathbb{K}$ への写像の全体を $\mathscr{M}(\mathsf{X}, \mathbb{K})$ とする：

$$\mathscr{M}(\mathsf{X}, \mathbb{K}) := \{F \,|\, F : \mathsf{X} \longrightarrow \mathbb{K}\}. \tag{1.40}$$

任意の $F, G \in \mathscr{M}(\mathsf{X}, \mathbb{K})$ に対して，和 $F+G : \mathsf{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ とスカラー倍 $\alpha F : \mathsf{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\alpha \in \mathbb{K}$) を

$$(F+G)(x) := F(x) + G(x), \quad (\alpha F)(x) := \alpha F(x), \quad x \in \mathsf{X} \tag{1.41}$$

によって定義すれば，この和とスカラー倍に関して，$\mathscr{M}(\mathsf{X}, \mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．この場合，零ベクトルは，X のすべての元を $0 \in \mathbb{K}$ にもたらす写像，すなわち，零写像であり，F の逆ベクトルは，$(-1)F$ である．

各 $F \in \mathscr{M}(\mathsf{X}, \mathbb{K})$ と X 上の変換 $T \in \mathscr{G}(\mathsf{X})$ に対して，$F_T \in \mathscr{M}(\mathsf{X}, \mathbb{K})$ を

$$F_T(x) := F(T^{-1}(x)), \quad x \in \mathsf{X}$$

によって定義する．

写像の等式 $F_T = F$ が成り立つとき，F は**変換** T **に関して対称**または単に T **対称**であるという．

写像 $\hat{T} : \mathscr{M}(\mathsf{X}, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{M}(\mathsf{X}, \mathbb{K})$ を

$$\hat{T}(F) := F_T \tag{1.42}$$

によって定義する．容易にわかるように，$\hat{T}$ は線形である．さらに次の補題が成立する：

補題 1.66 任意の $T\in\mathscr{G}(\mathsf{X})$ に対して，$\hat{T}$ は全単射である．したがって，$\hat{T}\in \mathrm{GL}(\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathbb{K}))$ ($\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathbb{K})$ 上の一般線形群).

証明 $F\in\ker\hat{T}$ とする．したがって，$\hat{T}F=0$. ゆえに，すべての $x\in\mathsf{X}$ に対して，$F(T^{-1}(x))=0$. しかし，T^{-1} は全単射であるから，$F(y)=0$ $(\forall y\in\mathsf{X})$. ゆえに $F=0$. よって，$\hat{T}$ は単射である．任意の $G\in\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathbb{K})$ に対して，$F\in\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathbb{K})$ を $F(x):=G(T(x))$ $(x\in\mathsf{X})$ によって定義すれば，$\hat{T}F=G$. したがって，$\hat{T}$ は全射である． ■

こうして，X 上の変換 T に対して，$\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathbb{K})$ 上の線形な変換 $\hat{T}$ が同伴することがわかる．

さて，$\mathscr{T}$ を X 上の変換群とし，$\rho:\mathscr{T}\longrightarrow\mathrm{GL}(\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathbb{K}))$ を

$$\rho(T):=\hat{T},\quad T\in\mathscr{T} \tag{1.43}$$

によって定義する．

定理 1.67 ρ は変換群 $\mathscr{T}$ のベクトル空間 $\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathbb{K})$ 上での表現である．

証明 ρ の準同型性だけを示せばよい．だが，これは直接的である (任意の $T_1,T_2\in\mathscr{T}$ に対して成立する式 $(T_1T_2)^{-1}=T_2^{-1}T_1^{-1}$ を用いて，$\widehat{T_1T_2}=\hat{T}_1\hat{T}_2$ を示せ)． ■

いま証明した定理によって

$$\rho(\mathscr{T}):=\{\rho(T)\,|\,T\in\mathscr{T}\} \tag{1.44}$$

は $\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathsf{V})$ 上の変換群をなす．したがって，この変換群に関しても種々の対称性が定義される (定義 1.59 で X が $\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathbb{K})$ の場合[*29])．この型の対称性を X 上の**スカラー値関数についての対称性**と呼ぶ.

便宜上，すべての $T\in\mathscr{T}$ に対して，T 対称な関数 F を **$\mathscr{T}$ 対称な関数**と呼ぶ．これは，定義 1.59 の術語でいえば，F だけからなる集合 $\{F\}$ が $\rho(\mathscr{T})$ 対称であるということである．

例 1.68 $\mathsf{X}=\mathbb{R}^d,\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合を考え，$\phi\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ とする．

(i) ある $T\in\mathrm{SO}(d)$ に対して $\hat{T}\phi=\phi$, すなわち ϕ が T 対称であるとき，ϕ は T

[*29] この場合の “図形” は，X 上の関数の集合である．

による**回転**に関して**回転対称**であるという.

(ii) すべての $T \in \mathrm{SO}(d)$ による回転に関して回転対称な関数 $\phi: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\mathrm{SO}(d)$ 不変 (対称) なスカラー値関数または d 次元の**回転対称 (不変) な関数**という. これは, $\mathrm{SO}(d)$ 対称な関数のことに他ならない.

例 1.69 半無限区間 $[0,\infty)$ 上の任意の複素数値関数 f を用いて写像 $\phi: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\phi(\boldsymbol{x}) := f(|\boldsymbol{x}|)$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d)$ によって定義すれば, この ϕ は回転対称である.

1.6.2 ベクトル値関数の対称性

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする. X から V への写像 $u: \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{V}; \mathsf{X} \ni x \longmapsto u(x) \in \mathsf{V}$ を X 上の V **値関数**という[*30]. X 上の V 値関数の全体を $\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathsf{V})$ とする :

$$\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathsf{V}) := \{u | u: \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{V}\}. \tag{1.45}$$

この集合は, V 値関数の和とスカラー倍に関して $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間である (付録 B, 例 B.3 を参照).

$\mathscr{T}$ を X 上の変換群, $\nu: \mathscr{T} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathsf{V}); \mathscr{T} \ni T \longmapsto \nu(T) \in \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ を $\mathscr{T}$ の V 上での表現としよう. 各 $u \in \mathscr{M}(\mathsf{X},\mathsf{V})$ と $T \in \mathscr{T}$ に対して, $u_T \in \mathscr{M}(\mathsf{X},\mathsf{V})$ を

$$u_T(x) := \nu(T) u(T^{-1}(x)), \quad x \in \mathsf{X} \tag{1.46}$$

によって定義する. すると, 各 $T \in \mathscr{T}$ に対して, $\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathsf{V})$ 上の写像 $\rho_\nu(T)$ が

$$\rho_\nu(T)(u) := u_T, \quad u \in \mathscr{M}(\mathsf{X},\mathsf{V}) \tag{1.47}$$

によって定まる. このとき, $\nu(T)$ の線形性により, $\rho_\nu(T)$ は線形であることがわかる. すなわち, $\rho_\nu(T) \in \mathsf{L}(\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathsf{V}))$. したがって, 対応 $\rho_\nu: T \longmapsto \rho_\nu(T)$ は $\mathscr{T}$ から $\mathsf{L}(\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathsf{V}))$ への写像を定める. この写像について, 次の定理が成り立つ :

定理 1.70 ρ_ν は変換群 $\mathscr{T}$ の $\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathsf{V})$ 上での表現である.

証明 定理 1.67 と同様. ■

この定理によって

$$\rho_\nu(\mathscr{T}) := \{\rho_\nu(T) | T \in \mathscr{T}\} \tag{1.48}$$

は $\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathsf{V})$ 上の変換群をなす. したがって, この変換群に関する対称性が定義される.

[*30] $\mathsf{V} = \mathbb{K}$ の場合がスカラー値関数であるので, ベクトル値関数は, スカラー値関数の一般化の 1 つである.

例 1.71 $\mathsf{X}=\mathsf{V}=\mathbb{R}^d$ の場合を考え，G を $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)\cong\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の部分群とする．ν を G の恒等表現としよう：$\nu(g)=g$ $(g\in\mathsf{G})$ (例 1.36)．したがって，いまの場合，任意の $\boldsymbol{u}:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^d$ に対して，$(\rho_\nu(g)\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x})=g\boldsymbol{u}(g^{-1}(\boldsymbol{x}))$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d)$．$\rho_\nu(g)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$, すなわち，$g\boldsymbol{u}(g^{-1}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ $(\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d)$ が成り立つとき，$\boldsymbol{u}$ は g **対称**であるという．$\boldsymbol{u}$ がすべての $g\in\mathsf{G}$ に対して，g 対称であるとき，$\boldsymbol{u}$ は **G 対称**であるという．特に，$\mathsf{G}=\mathrm{O}(d),\mathrm{SO}(d)$ の場合の G 対称性をそれぞれ，**広義回転対称性**，**回転対称性**と呼ぶ．

例 1.72 半無限区間 $[0,\infty)$ 上の任意の実数値関数 f を用いて写像 $\boldsymbol{u}:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^d$ を $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=f(|\boldsymbol{x}|)\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d)$ によって定義すれば，これは広義回転対称である．

1.7 ユークリッドベクトル空間上の回転対称なスカラー場の一般形

V をユークリッドベクトル空間 (有限次元実内積空間) とする．V 上のスカラー場（ば） (スカラー値関数) $\phi:\mathsf{V}\longrightarrow\mathbb{K}$ が，すべての $T\in\mathrm{O}(\mathsf{V})$ $(\mathrm{SO}(\mathsf{V}))$ に対して，$\phi(Tx)=\phi(x)$ $(\forall x\in\mathsf{V})$ を満たすとき，ϕ は**広義回転対称** (**回転対称**) であるという[*31]．ベクトル $x\in\mathsf{V}$ のノルムを $\|x\|$ と表す．

半無限区間 $[0,\infty)$ 上の任意の関数 $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{K}$ を用いて，スカラー場 $\phi_f:\mathsf{V}\longrightarrow\mathbb{K}$ を $\phi_f(x):=f(\|x\|)$ $(x\in\mathsf{V})$ によって定義すれば，ϕ_f は広義回転対称である．じつは，回転対称なスカラー場はこの形に限る．これを証明するのが，この節の目的である．準備として，回転群 SO(V) に関する重要な構造定理の 1 つを証明する．

定理 1.73 $\dim\mathsf{V}\geq 2$ のとき，任意の $x,y\in\mathsf{V}\setminus\{0\}$ $(\|x\|=\|y\|)$ に対して，$Tx=y$ を満たす $T\in\mathrm{SO}(\mathsf{V})$ が存在する．

証明 V の単位ベクトル e_1 で x,y のそれぞれと線形独立であるものをとる．e_1,x で生成される 2 次元部分空間を M_x とする．

$$e_2:=\frac{x-\langle e_1,x\rangle_{\mathsf{V}}e_1}{\|x-\langle e_1,x\rangle_{\mathsf{V}}e_1\|}$$

とおけば $e_2\in M_x$ であり，$\{e_1,e_2\}$ は M_x の正規直交基底である．しかも，内積に関するシュヴァルツの不等式 (付録 C.7, 定理 C.16 (i)) により，$\langle x,e_2\rangle\geq 0$ が成り

---

*31 括弧には括弧を対応させて読む．

立つ.

任意のベクトル $z\in\mathsf{V}$ は $z=a_1e_1+a_2e_2+w_z$ と一意的に書ける．ただし，$a_1,a_2\in\mathbb{K}, w_z\in M_x^{\perp}$ (M_x の直交補空間)．シュヴァルツの不等式により，$\cos\theta=\langle e_1,x\rangle/\|x\|$ となる $\theta\in[0,\pi]$ がとれる．そこで，写像 $S:\mathsf{V}\longrightarrow\mathsf{V}$ を $Sz:=(a_1\cos\theta+a_2\sin\theta)e_1+(-a_1\sin\theta+a_2\cos\theta)e_2+w_z$ によって定義すれば，$S\in\mathrm{SO}(\mathsf{V})$ である．さらに，$x=(\|x\|\cos\theta)e_1+(\|x\|\sin\theta)e_2$ であるから，$Sx=\|x\|e_1$．同様にして，$R\in\mathrm{SO}(\mathsf{V})$ があって，$Ry=\|y\|e_1$ となる．したがって，$Sx=Ry$．ゆえに $y=R^{-1}Sx$．そこで，$T=R^{-1}S$ とおけば，題意が成立する． ■

次の定理は，対称性が関数の構造をいかに規定するかを示す典型的な例の 1 つである.

定理 1.74 $\phi:\mathsf{V}\longrightarrow\mathbb{K}$ を回転対称なスカラー場とする．このとき，ϕ は $\|x\|$ だけの関数である．すなわち，関数 $\Phi:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{K}$ が存在して $\phi(\boldsymbol{x})=\Phi(\|x\|)$ $(x\in\mathsf{V})$ が成立する.

証明 各 $r>0$ に対して，$D_r:=\{x\in\mathsf{V}\,|\,\|x\|=r\}$ とすれば，$\mathsf{V}=\{0\}\cup\left(\bigcup_{r>0}D_r\right)$ と書ける．任意の $x,y\in D_r$ $(r>0)$ に対して，$\|x\|=\|y\|=r$ である．したがって，定理 1.73 により，$y=Tx$ となる $T\in\mathrm{SO}(\mathsf{V})$ が存在する．ϕ は回転対称であるから，$\phi(x)=\phi(y)$ が成り立つ．したがって，ϕ は D_r 上で定数である．この定数は r だけに依存するので，これを C_r と記す．すると写像 $\Phi:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{K}$ を次のように定義できる：$\Phi(0):=\phi(0),\Phi(r):=C_r$ $(r>0)$．このとき，任意の $x\in\mathsf{V}\setminus\{0\}$ に対して，$x\in D_{\|x\|}$ であるから，$\phi(x)=C_{\|x\|}=\Phi(\|x\|)$．よって題意が成立する． ■

1.8 リー代数

例 1.54 で見たように，任意の n 次正方行列 A に対して，$\mathsf{E}_A:=\{e^{tA}|t\in\mathbb{R}\}$ は群 (可換群) をなす．この群は「1 つの行列 A から生成される」と読むことができる．このことから，E_A を 1 つの例として含む，ある範疇の群は，もっと根源的な対象から “生成される” 構造を持ち得ることが示唆される．そこで，それがどういうものであるかを探るために，E_A 型の群が行列群の部分群である場合，その生成子 A にどのような制限がつくかを調べてみる．すなわち，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の部分群 G について，すべての実数 t に対して，$e^{tX}\in\mathsf{G}$ となるような行列 $X\in\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ の集合

$$\mathfrak{l}(\mathsf{G}):=\{X\in\mathsf{M}_n(\mathbb{C})\,|\,e^{tX}\in\mathsf{G}\ (\forall t\in\mathbb{R})\} \tag{1.49}$$

がいかなる性質を持つ集合であるかを考察するのである．

例 1.75　$\mathsf{G}=\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の場合．この場合は，任意の $X\in\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ に対して，$e^{tX}\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ であるから

$$\mathfrak{l}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}))=\mathsf{M}_n(\mathbb{C}). \tag{1.50}$$

次の例に行く前に，ある数学的準備を行う．一般に，写像 $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathsf{M}_n(\mathbb{C});\mathbb{R}\ni t\longmapsto F(t)\in\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ を**行列値関数**という．$F(t)$ の (i,j) 成分を $F_{ij}(t)$ と書く．各 $i,j=1,\cdots,n$ に対して，関数 $F_{ij}:t\longmapsto F_{ij}(t)$ が $\mathbb{R}$ 上で連続であるとき，F は $\mathbb{R}$ 上で**連続**であるという．また，各 $i,j=1,\cdots,n$ に対して，F_{ij} が $\mathbb{R}$ 上で微分可能であるとき，F は $\mathbb{R}$ 上で**微分可能**であるという．このとき，F の**導関数** $F':\mathbb{R}\longrightarrow\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ を

$$F'(t):=(F_{ij}'(t)),\quad t\in\mathbb{R} \tag{1.51}$$

によって定義する．$F'(t)=\dfrac{dF(t)}{dt}=\dfrac{d}{dt}F(t)$ というふうにも記す．

$F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ が連続であるとき，その**積分** $\displaystyle\int_{t_0}^{t}F(s)\,ds\in\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ $(t_0,t\in\mathbb{R})$ を

$$\left(\int_{t_0}^{t}F(s)\,ds\right)_{ij}:=\int_{t_0}^{t}F_{ij}(s)\,ds,\quad t,t_0\in\mathbb{R},\quad i,j=1,\cdots,n \tag{1.52}$$

によって定義する．すなわち，$\displaystyle\int_{t_0}^{t}F(s)\,ds$ は，その (i,j) 成分が F_{ij} の積分 $\displaystyle\int_{t_0}^{t}F_{ij}(s)\,ds$ によって与えられる行列である．

命題 1.76 (行列値関数についての微分積分学の基本定理)　$F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ を連続微分可能な行列値関数とする．このとき

$$F(t)-F(t_0)=\int_{t_0}^{t}F'(s)\,ds \tag{1.53}$$

証明　成分に分けて考察し，それに対して，1 変数関数の微分積分学の基本定理を適用すればよい． ■

例 1.77　$A\in\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ とし，$g_A(t):=e^{tA}$ $(t\in\mathbb{R})$ とおく．このとき，$g_A:\mathbb{R}\longrightarrow\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ は連続である．実際，$u(s):=e^{sA}-I_n$ $(s\in\mathbb{R})$ とおけば

$$g_A(t+s)-g_A(t)=u(s)g_A(t).$$

行列の指数関数の定義により $(M_A:=\max_{i,j=1,\cdots,n}|A_{ij}|)$

$$|u(s)_{ij}| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(A^k)_{ij}|}{k!}|s|^k \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k M_A^k}{k!}|s|^k$$

$$\le |s| n M_A e^{nM_A|s|} \longrightarrow 0 \ (s \longrightarrow 0).$$

したがって，$\lim_{s\to 0}(g_A(t+s)-g_A(t))=0$. 同様にして，$g_A$ は微分可能であり，微分方程式

$$\frac{dg_A(t)}{dt} = Ag_A(t) = g_A(t)A \tag{1.54}$$

を満たすことが示される (問題 10). これは，群 $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ が行列値関数 $X:\mathbb{R}\longrightarrow \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ に関する微分方程式 — A から定まる微分方程式 —

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

の解として得られることを意味している．この意味で，群 $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ は積分された対象として現れてくるのである．そして，その根底にあるのが A であり，これは，e^{tA} の $t=0$ での微分として与えられるという構造を持つ ($g_A'(0)=A$ に注意).

例 1.78 H を n 次のエルミート行列とし，$U_H(t) := e^{-itH}$ $(t\in\mathbb{R})$ とする (前例で $A=-iH$ の場合). このとき，$U_H(t)$ はユニタリ行列である (∵ 例 1.54 によって，$U_H(t)^* = e^{itH}, e^{-itH}e^{itH} = I_n$). したがって，$\{U_H(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は n 次元ユニタリ群 $\mathrm{U}(n)$ の可換な部分群である．さらに，前例により，微分方程式

$$i\frac{dU_H(t)}{dt} = HU_H(t)$$

が成り立つ.

補題 1.79 $F, G:\mathbb{R}\longrightarrow \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であるとする．このとき，$F(t)G(t)$ も $\mathbb{R}$ 上で微分可能であり

$$\frac{d}{dt}[F(t)G(T)] = F'(t)G(t) + F(t)G'(t) \tag{1.55}$$

が成り立つ (積の順序に注意[*32]).

証明 $A(t)=F(t)G(t)$ とおくと，$A_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} F_{ik}(t)G_{kj}(t)$. したがって，通常の微分のライプニッツ則により，$A'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n}(F'_{ik}(t)G_{kj}(t) + F_{ik}(t)G'_{kj}(t)) = (F'(t)G(t))_{ij} + (F(t)G'(t))_{ij}$. ■

[*32] $F'(t)G(t) = G(t)F'(t)$ とは限らない．$F(t)G'(t)$ についても同様.

再び，行列群の例にもどる．

例 1.80　$\mathsf{G}=\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の場合．この場合は，任意の $X\in\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ に対して，$e^{tX}\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ であるから $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})\subset\mathfrak{l}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$．逆に，$f(t):=e^{tX}\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ とすれば，$f'(t)\in\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$．一方，$f'(t)=Xe^{tX}$．特に，$f'(0)=X$．したがって，$X\in\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$．ゆえに

$$\mathfrak{l}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))=\mathsf{M}_n(\mathbb{R}). \tag{1.56}$$

例 1.81　$\mathsf{G}=\mathrm{O}(n)$ の場合．$e^{sX}\in\mathrm{O}(n)$ $(s\in\mathbb{R})$ ならば，${}^{\mathrm{t}}(e^{sX})e^{sX}=I_n$．${}^{\mathrm{t}}(e^{sX})=e^{s^{\mathrm{t}}X}$ であるから，$e^{s^{\mathrm{t}}X}e^{sX}=I_n$．両辺を s で微分すれば，補題 1.79 により，

$${}^{\mathrm{t}}Xe^{s^{\mathrm{t}}X}e^{sX}+e^{s^{\mathrm{t}}X}Xe^{sX}=0.$$

$s=0$ とすれば，${}^{\mathrm{t}}X+X=0\cdots(*)$．逆に，$(*)$ が成り立つならば，${}^{\mathrm{t}}(e^{sX})e^{sX}=e^{-sX}e^{sX}=I_n$ であるので，$e^{sX}\in\mathrm{O}(n)$．したがって

$$\mathfrak{l}(\mathrm{O}(n))=\{X\in\mathsf{M}_n(\mathbb{R})\,|\,{}^{\mathrm{t}}X+X=0\}. \tag{1.57}$$

これは，実交代行列の全体である．

例 1.82　$\mathsf{G}=\mathrm{SO}(n)$ の場合．$e^{tX}\in\mathrm{SO}(n)$ $(t\in\mathbb{R})$ ならば，もちろん，$e^{tX}\in\mathrm{O}(n)$ であるから，X は実交代行列である．条件 $\det e^{tX}=1$ $(\forall t\in\mathbb{R})$ は $\mathrm{Tr}\,X=0$ ($\mathrm{Tr}\,X$ は行列 X のトレース) を意味する．ここで，一般公式

$$\det e^{A}=e^{\mathrm{Tr}\,A},\quad \forall A\in\mathsf{M}_n(\mathbb{C}) \tag{1.58}$$

を用いた．逆に，X が交代行列で $\mathrm{Tr}\,X=0$ を満たすならば，$e^{tX}\in\mathrm{O}(n)$ であり，(1.58) により，$\det e^{tX}=1$．したがって，$e^{tX}\in\mathrm{SO}(n)$．ゆえに

$$\mathfrak{l}(\mathrm{SO}(n))=\{X\in\mathsf{M}_n(\mathbb{R})\,|\,{}^{\mathrm{t}}X+X=0,\mathrm{Tr}\,X=0\}. \tag{1.59}$$

例 1.83　$\mathsf{G}=\mathrm{U}(n)$ の場合．$e^{tX}\in\mathrm{U}(n)$ ならば，$e^{tX^*}e^{tX}=I_n$ となるので，$\mathrm{O}(n)$ の場合と同様にして，$X^*+X=0$．すなわち，X は反エルミート行列である．逆に X が反エルミート行列ならば，例 1.81 の場合と同様にして，$e^{tX}\in\mathrm{U}(n)$ がわかる．よって

$$\mathfrak{l}(\mathrm{U}(n))=\{X\in\mathsf{M}_n(\mathbb{C})\,|\,X^*+X=0\}. \tag{1.60}$$

例 1.84　$\mathsf{G}=\mathrm{SU}(n)$ の場合．例 1.82 の場合と同様にして

$$\mathfrak{l}(\mathrm{SU}(n))=\{X\in\mathsf{M}_n(\mathbb{C})\,|\,X^*+X=0,\mathrm{Tr}\,X=0\} \tag{1.61}$$

がわかる．

例 1.85 $\mathsf{G}=\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ の場合．(1.58) によって

$$\mathfrak{l}(\mathrm{SL}(n,\mathbb{K}))=\{X\in\mathsf{M}_n(\mathbb{K})\,|\,\mathrm{Tr}\,X=0\} \tag{1.62}$$

となる．

さて，これらの例における $\mathfrak{l}(\mathsf{G})$ に共通する構造を抽出すると次のことがわかる (確かめよ)：

(i) $X,Y\in\mathfrak{l}(\mathsf{G})$ ならば，任意の $a,b\in\mathbb{R}$ に対して，$aX+bY\in\mathfrak{l}(\mathsf{G})$.

(ii) $X,Y\in\mathfrak{l}(\mathsf{G})$ ならば，$[X,Y]\in\mathfrak{l}(\mathsf{G})$. ただし，任意の $A,B\in\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ に対して

$$[A,B]:=AB-BA. \tag{1.63}$$

これを A,B の**交換子**と呼ぶ.

$\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ は，行列の和とスカラー倍に関して複素ベクトル空間であるが，実ベクトル空間でもある．(i) は，$\mathfrak{l}(\mathsf{G})$ が実ベクトル空間としての $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ の部分空間であることを語る．したがって，それは，実ベクトル空間である．(ii) は，X,Y が $\mathfrak{l}(\mathsf{G})$ の元ならば，それらの交換子も $\mathfrak{l}(\mathsf{G})$ に属することを語る．つまり，$\mathfrak{l}(\mathsf{G})$ は，交換子をとる演算で閉じているということである．この第 2 の構造を抽象化するためには，交換子の性質を知る必要がある．次の性質が成り立つことがわかる (A,B,C は任意の n 次正方行列)：

(a) $[aA+bB,C]=a[A,C]+b[B,C], \quad a,b\in\mathbb{C}$.

(b) $[A,B]=-[B,A]$.

(c) $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$.

こうして，上述の例の $\mathfrak{l}(\mathsf{G})$ に共通する性質を抽象化することにより，ある普遍的な代数概念へと到る：

定義 1.86 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし，$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．写像 $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ で次の性質を満たすものがあるとき，$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ を $\mathbb{K}$ 上の**リー代数**または**リー環**といい，$[\cdot,\cdot]$ を**リー括弧積**と呼ぶ：

(i) (線形性) $[ax+by,z]=a[x,z]+b[y,z]$ $(x,y,z\in\mathfrak{g},\ a,b\in\mathbb{K})$.

(ii) (反対称性) $[x,y]=-[y,x]$ $(x,y\in\mathfrak{g})$.

(iii) (ヤコビ恒等式) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$ $(x,y,z\in\mathfrak{g})$.

$\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ の場合，それぞれ，$\mathfrak{g}$ を**実リー代数**，**複素リー代数**という．ベクトル空間としての $\mathfrak{g}$ の次元をリー代数 $\mathfrak{g}$ の**次元**という．

注意 1.87 いうまでもなく，この定義における $[\cdot,\cdot]$ は，交換子を意味するものではない (そもそも，$x,y\in\mathfrak{g}$ に対して，積 $xy\in\mathfrak{g}$ が定義されるとは仮定されていない).

注意 1.88 (i), (ii) を用いると，リー括弧積の右変数に関する線形性 $[z,ax+by]=a[z,x]+b[z,y]$ $(x,y,z\in\mathfrak{g},a,b\in\mathbb{K})$ がしたがう.

例 1.89 V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，L(V) を V 上の線形作用素の全体とする．写像 $[\cdot,\cdot]:\mathsf{L}(\mathsf{V})\longrightarrow\mathsf{L}(\mathsf{V})$ を

$$[A,B]:=AB-BA,\quad A,B\in\mathsf{L}(\mathsf{V}) \tag{1.64}$$

によって定義する．これを A と B の**交換子** (commutator) という．このとき，交換子はリー括弧積の性質を持つことが確かめられる (ヤコビ恒等式の証明は単なる直接計算)．したがって，L(V) は交換子に関して $\mathbb{K}$ 上のリー代数である.

以上によって，上の例における $\mathfrak{l}(\mathsf{G})$ はすべて実リー代数であることがわかる．このリー代数を**行列群 G のリー代数**と呼ぶ．通常，次の記号が使われる (表 1.1) :

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}):=\mathfrak{l}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})),\quad \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}):=\mathfrak{l}(\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})), \tag{1.65}$$

$$\mathfrak{u}(n):=\mathfrak{l}(\mathrm{U}(n)),\quad \mathfrak{su}(n):=\mathfrak{l}(\mathrm{SU}(n)), \tag{1.66}$$

$$\mathfrak{o}(n):=\mathfrak{l}(\mathrm{O}(n)),\quad \mathfrak{so}(n):=\mathfrak{l}(\mathrm{SO}(n)). \tag{1.67}$$

ここに示された，行列群とリー代数の関係は，さらに一般化されうる.

定義 1.90 G を一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の部分群とする．G の元の列 $A_k\in\mathsf{G}$ $(k=1,2,\cdots)$ がある $A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ に収束するならば，すなわち，$\lim_{k\to\infty}A_k=A$ ならば，つねに $A\in\mathsf{G}$ が成り立つとき，G は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の中で**閉じている**いう．このような部分群 G を n 次の**線形リー群**と呼ぶ.

これまでに取り上げた行列群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}),\mathrm{SL}(n,\mathbb{K}),\mathrm{O}(n),\mathrm{SO}(n),\mathrm{U}(n),\mathrm{SU}(n)$ はすべて線形リー群である[*33]．線形リー群について，次の定理が成り立つ :

[*33] (i) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ が線形リー群であるのは，線形リー群の定義から自明．(ii) $A_k\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ とし，$\lim_{k\to\infty}A_k=A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ とすれば，$\lim_{k\to\infty}(A_k)_{ij}=A_{ij}$．$(A_k)_{ij}\in\mathbb{R}$ であるから，$A_{ij}\in\mathbb{R}$．したがって，$A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$．ゆえに $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ は線形リー群である．(iii) $A_k\in\mathrm{O}(n)$, $\lim_{k\to\infty}A_k=A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ とする．(ii) より，$A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$．$\sum_{m=1}^{n}(A_k)_{mi}(A_k)_{mj}=\delta_{ij}$ であるから，$k\longrightarrow\infty$ とすれば，$\sum_{m=1}^{n}A_{mi}A_{mj}=\delta_{ij}$．したがって，$A\in\mathrm{O}(n)$. 残りの群についても同様 (要するに，群の元を規定する方程式を定義する関数が変数に関して連続であればよい).

表 1.1 群とリー代数.

群	群の元	リー代数	リー代数の元
複素一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$	正則な n 次複素行列	$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$	n 次複素行列
実一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$	正則な n 次実行列	$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$	n 次実行列
複素特殊線形群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$	行列式が 1 の n 次複素行列	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$	トレースが 0 の n 次複素行列
実特殊線形群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$	行列式が 1 の n 次実行列	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$	トレースが 0 の n 次実行列
ユニタリ群 $\mathrm{U}(n)$	n 次ユニタリ行列	$\mathfrak{u}(n)$	n 次反エルミート行列
特殊ユニタリ群 $\mathrm{SU}(n)$	行列式が 1 の n 次ユニタリ行列	$\mathfrak{su}(n)$	トレースが 0 の n 次反エルミート行列
直交群 $\mathrm{O}(n)$	n 次直交行列	$\mathfrak{o}(n)$	n 次交代行列
回転群 $\mathrm{SO}(n)$	行列式が 1 の直交行列	$\mathfrak{so}(n)$	トレースが 0 の n 次交代行列

定理 1.91 G を任意の線形リー群とするとき

$$\mathfrak{l}(\mathsf{G}) := \{X \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C}) \mid e^{tX} \in \mathsf{G}\ (\forall t \in \mathbb{R})\}$$

は実リー代数である.

この定理の証明は割愛する*34. だが, ここで示唆される重要な点は, リー代数の方がより深いレヴェルでの対称性を記述する理念でありうるということである. 実際, たとえば, 量子力学においては, リー代数的理念の方がより根源的であることが示されるのである. この側面については, 第 7 章でふれる.

1.8.1 リー代数の同型

群の場合に同型の概念が考えられたように, リー代数についても同型の概念が自然な仕方で定義される：

定義 1.92 $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ を $\mathbb{K}$ 上のリー代数とする. 線形作用素 $A:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{h}$ で次の性質を満たすものが存在するとき, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ はリー代数として**同型**であるという：

---

*34 たとえば, 山内恭彦・杉浦光夫『連続群論入門』(培風館, 1960) の第 3 章を参照.

(i) A は全単射である (したがって，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ はベクトル空間として同型).

(ii) A はリー括弧積を保存する：

$$A([x,y])=[A(x),A(y)],\quad x,y\in\mathfrak{g}.$$

注意 1.93 性質 (ii) を持つ線形作用素 $A:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{h}$ (必ずしも全単射である必要はない) を**準同型写像**と呼ぶ.

定義から明らかなように，同型なリー代数どうしは，リー代数としてはまったく同じ構造を持つ．この意味で，同型なリー代数は本質的に同じリー代数と見ることができるのである.

1.9　補遺：準同型定理

この節では，群論の基礎的定理のひとつである準同型定理を述べ，その証明を行う．この定理は，本書を通読する上では必要はないが，その重要性に鑑み，読者の発展学習のための参考に供する意味も含めて，ここで取り上げておくしだいである.

1.9.1　商群

G を群とし，N を G の部分群とする．各 $a\in$ G に対して定まる G の部分集合

$$a\mathsf{N}:=\{ag\,|\,g\in\mathsf{N}\}\tag{1.68}$$

を N に関する**左剰余類**と呼ぶ．これと対をなす集合 $\mathsf{N}a:=\{ga|g\in\mathsf{N}\}$ を N に関する**右剰余類**という.

補題 1.94 $a,b\in$ G とする．このとき，次の (i),(ii) が成り立つ:

(i) $a\mathsf{N}=b\mathsf{N}$ であるための必要十分条件は，$a^{-1}b\in\mathsf{N}$ が成り立つことである.

(ii) $\mathsf{N}a=\mathsf{N}b$ であるための必要十分条件は，$ab^{-1}\in\mathsf{N}$ が成り立つことである.

証明 (i) (必要性) $a\mathsf{N}=b\mathsf{N}$ ならば，任意の $g\in\mathsf{N}$ に対して $h\in\mathsf{N}$ があって，$ag=bh$ が成り立つ．これは $a^{-1}b=gh^{-1}$ を意味する．N は部分群であるから，$gh^{-1}\in\mathsf{N}$．したがって，$a^{-1}b\in\mathsf{N}$.

(十分性) $a^{-1}b\in\mathsf{N}$ とする．N は G の部分群であるから，$(a^{-1}b)^{-1}\in\mathsf{N}$. 左辺は $b^{-1}a$ に等しいから，$b^{-1}a\in\mathsf{N}\cdots(*)$.

まず，$a\mathsf{N}\subset b\mathsf{N}$ を示す．任意の $g\in\mathsf{N}$ に対して，$ag=b(b^{-1}ag)$ と書ける．$(*)$ に

よって，$b^{-1}ag \in \mathsf{N}$．したがって，$ag \in b\mathsf{N}$．ゆえに $a\mathsf{N} \subset b\mathsf{N}$．

同様に，$a^{-1}b \in \mathsf{N}$ から $b\mathsf{N} \subset a\mathsf{N}$ が導かれる．

(ii) (i) の証明と同様． ■

補題 1.95 N が正規部分群 (定義 1.26) ならば，$a\mathsf{N} = \mathsf{N}a$ $(\forall a \in \mathsf{G})$．

証明 任意の $x \in \mathsf{N}$ に対して $ax = (axa^{-1})a$．N は正規部分群であるから $axa^{-1} \in \mathsf{N}$．したがって $ax \in \mathsf{N}a$．ゆえに $a\mathsf{N} \subset \mathsf{N}a$．同様に，$xa = a(a^{-1}xa)$ に注意することにより，$\mathsf{N}a \subset a\mathsf{N}$ がわかる． ■

いま，N を正規部分群としよう．このとき，補題 1.95 によって，N に関する左剰余類の全体と右剰余類の全体は等しい．そこで

$$\mathsf{G}/\mathsf{N} := \{a\mathsf{N} | a \in \mathsf{G}\} = \{\mathsf{N}a | a \in \mathsf{G}\} \tag{1.69}$$

を定義し，これを G の N による**商集合**と呼ぶ．この集合の任意の 2 つの元 $a\mathsf{N}, b\mathsf{N}$ に対して，積 $a\mathsf{N} \cdot b\mathsf{N} \in \mathsf{G}/\mathsf{N}$ を

$$a\mathsf{N} \cdot b\mathsf{N} := ab\mathsf{N} \tag{1.70}$$

によって定義できる．

定理 1.96 N を正規部分群とする．このとき，G/N は，積演算 (1.70) に関して群である．この場合，単位元 $I_{\mathsf{G}/\mathsf{N}}$ は $a\mathsf{N}$ ($a \in \mathsf{N}$ は任意) であり，任意の $x \in \mathsf{G}$ に対して，$x\mathsf{N}$ の逆元は $x^{-1}\mathsf{N}$ である．

証明 (積の結合則) 任意の $a, b, c \in \mathsf{G}$ に対して，$(a\mathsf{N} \cdot b\mathsf{N}) \cdot c\mathsf{N} = (ab)c\mathsf{N} = a(bc)\mathsf{N} = a\mathsf{N} \cdot (b\mathsf{N} \cdot c\mathsf{N})$．

(単位元の存在) $a \in \mathsf{N}$ とすれば，任意の $x \in \mathsf{G}$ に対して，$a\mathsf{N} \cdot x\mathsf{N} = ax\mathsf{N}$．一方，N は正規部分群であから，$x^{-1}(ax) \in \mathsf{N}$．したがって，補題 1.94 によって，$ax\mathsf{N} = x\mathsf{N}$．同様にして，$x\mathsf{N} \cdot a\mathsf{N} = x\mathsf{N}$ が示される．したがって，$a\mathsf{N}$ は，いま考えている積演算に関して単位元である．ゆえに $I_{\mathsf{G}/\mathsf{N}} = a\mathsf{N}$．

(逆元の存在) 各 $x \in \mathsf{G}$ に対して，$x\mathsf{N} \cdot x^{-1}\mathsf{N} = e\mathsf{N} = I_{\mathsf{G}/\mathsf{N}}$．同様に，$x^{-1}\mathsf{N} \cdot x\mathsf{N} = I_{\mathsf{G}/\mathsf{N}}$． ■

群 G/N を G の正規部分群 N による**商群**とよぶ．こうして，群 G の各正規部分群にひとつの群 (商群) が同伴している構造が明らかになる．これは，2 つの群から新たな群が生み出される構造のひとつと見ることができる．

1.9.2　準同型定理

さて，G, H は群であるとし，ϕ: G ⟶ H を準同型写像としよう．ϕ が全単射であれば，もちろん，G と H は同型である．だが，応用においては，ϕ が全単射とは限らない場合がしばしば現れる．次に述べる定理 (準同型定理) は，このような場合を扱う一般的手法を提供する．

前項の議論と $\ker\phi$ が正規部分群であることにより，商群 $\mathsf{G}/\ker\phi$ が自然に考えられる．この群について，次の定理は基本的である:

定理 1.97 (準同型定理)　写像 $\Phi: \mathsf{G}/\ker\phi \longrightarrow \phi(\mathsf{G})$ を

$$\Phi(A) := \phi(a), \quad A \in \mathsf{G}/\ker\phi \tag{1.71}$$

によって定義する．ただし，$a \in \mathsf{G}$ は，$a\ker\phi = A$ となる任意の元である．このとき，Φ は同型写像である．

証明　$A \in \mathsf{G}/\ker\phi$ に対して，$\phi(a)$ が一意的に決まること (したがって，写像 Φ はきちんと定義されている) は次のようにしてわかる．実際，$a\ker\phi = A = b\ker\phi$ とすれば，補題 1.94 によって，$a^{-1}b \in \ker\phi$. したがって，$\phi(a^{-1}b) = e_{\mathsf{H}}$. 左辺は $\phi(a)^{-1}\phi(b)$ に等しいから，$\phi(a) = \phi(b)$ が成り立つ．

(Φ の準同型性) 任意の $A, B \in \mathsf{G}/\ker\phi$ に対して，$A = a\ker\phi, B = b\ker\phi$ $(a, b \in \mathsf{G})$ とすれば $AB = ab\ker\phi$ であるから，$\Phi(AB) = \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \Phi(A)\Phi(B)$.

(Φ の全単射性) Φ の全射性は自明であろう．単射性を示すために，$\Phi(A) = \Phi(B), A = a\ker\phi, B = b\ker\phi$ としよう．このとき $\phi(a) = \phi(b)$. したがって，$\phi(a)^{-1}\phi(b) = e_{\mathsf{H}}$. これは $\phi(a^{-1}b) = e_{\mathsf{H}}$ を意味する．したがって $a^{-1}b \in \ker\phi$. ゆえに，補題 1.94 によって，$a\ker\phi = b\ker\phi$, すなわち $A = B$ が成り立つ．よって，Φ は単射である．■

この定理にいう $\mathsf{G}/\ker\phi$ と $\phi(\mathsf{G})$ の同型を $\mathsf{G}/\ker\phi$ と $\phi(\mathsf{G})$ の**標準同型**とよび，通常，単に

$$\mathsf{G}/\ker\phi \cong \phi(\mathsf{G}) \tag{1.72}$$

と記す．ϕ が全射ならば，$\mathsf{G}/\ker\phi \cong \mathsf{H}$ である．

＊＊＊＊＊

本章で提示した群論やリー代数の理論はまったく入門的な水準のものであり，第 2 章以下を理解するために最小限必要とされる内容に絞ってある．そこで，読者の便宜のために，本書を読んだあとで，群論やリー代数の理論をより深く広く学ぶための本をいくつかあげておく*35：

(1) 江沢 洋・島 和久『群と表現』，岩波書店，1994.

(2) ポントリャーギン『連続群論上下』(柴岡康光・杉浦光夫・宮崎功訳)，岩波書店，1957, 1958.

(3) 保江邦夫『連続群論』(数理物理学方法序説 7)，日本評論社，2001.

(4) 山内恭彦・杉浦光夫『連続群論入門』，培風館，1960.

なお，拙著『現代物理数学ハンドブック』(朝倉書店，2005) の 1.6 節，第 8 章と第 18 章に，この分野の基本的内容のまとめがある．

第 1 章の演習問題

1. $n \geq 2$ ならば，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ は非可換群であることを示せ．

2. G を群とし，g を G の任意の元とする．このとき，$\mathsf{G}_g := \{g^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ は G の部分群であることを示せ．

3. G をアーベル群とし，$g_1,\cdots,g_p$ を G の任意の元とする．このとき，$\mathsf{G}_{g_1,\cdots,g_p} := \{g_1^{n_1}\cdots g_p^{n_p} \,|\, n_j \in \mathbb{Z}\ (j=1,\cdots,p)\}$ は G の部分群であることを示せ．

4. p, q を自然数とし，$n=p+q$ とおく．n 次の正方行列 g (対角行列) を次のように定義する：

$$g_{ii}=1\ (i=1,\cdots,p),\quad g_{jj}=-1\ (j=p+1,\cdots,n),$$
$$g_{ij}=0\ (i \neq j).$$

(i) 行列 $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ が

$$A^* g A = g \tag{†}$$

を満たすならば，$A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ であり，$(A^{-1})^* g A^{-1} = g$ が成り立つことを示せ．

(ii) (†) を満たす行列 A の全体

*35 この他にも非常に多くの本が出版されているので，自分にあったものを探すことを勧める．

$$\mathscr{A}(n,\mathbb{K}) := \{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ は } (\dagger) \text{ を満たす}\}$$

は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ の部分群であることを示せ.

注　$g = I_n$ の場合の $\mathscr{A}(n,\mathbb{R}), \mathscr{A}(n,\mathbb{C})$ がそれぞれ，n 次直交群，n 次元ユニタリ群である．また，$p=1, q=n-1$ の場合の $\mathscr{A}(n,\mathbb{K})$ は**ローレンツ群**と呼ばれる (第4章を参照)．したがって，$\mathscr{A}(n,\mathbb{K})$ は，これらの群の一般化を与える.

5. (**計量同型定理**)　V, W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元計量ベクトル空間とし，$n = \dim \mathsf{V} = \dim \mathsf{W}$ とする．$\{e_i\}_{i=1}^n, \{f_i\}_{i=1}^n$ をそれぞれ，V, W の基底で

$$\langle e_i, e_j \rangle_{\mathsf{V}} = \langle f_i, f_j \rangle_{\mathsf{W}}, \quad i,j = 1, \cdots, n$$

を満たすものとする．ただし，$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathsf{V}}$ は V の計量を表す．このとき，全単射な線形作用素 $T : \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{W}$ で $\langle Tx, Ty \rangle_{\mathsf{W}} = \langle x, y \rangle_{\mathsf{V}}$ $(\forall x, y \in \mathsf{V})$ かつ $Ue_i = f_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ を満たすものが唯ひとつ存在することを示せ.

6. V を有限次元の複素内積空間とする．任意の $x, y \in \mathsf{V} \setminus \{0\}$ $(\|x\| = \|y\|)$ に対して，$Ux = y$ を満たす $U \in \mathrm{U}(\mathsf{V})$ があることを示せ.

7. 任意の $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間 V に対して，$\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ は $\mathsf{V} \setminus \{0\}$ 上で推移的であることを示せ.

8. (1.22) によって定義される写像 $\rho : \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ は同型写像であることを示せ.

9. 2次元回転群 $\mathrm{SO}(2)$ の任意の元は，(1.39) で定義される行列 $R(\theta)$ の形に表されることを示せ.

10. 任意の行列 $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ に対して，$g_A(t) := e^{tA}$ $(t \in \mathbb{R})$ とおく．このとき，g_A は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であり，$g_A'(t) = Ag_A(t) = g_A(t)A$ が成り立つことを示せ.

第2章

ニュートン力学

2.1 ニュートン力学的時空

ニュートン力学とは，通常の現象領域における巨視的な物体の運動の法則性をいくつかの普遍的な基本原理から解明する理論体系である．

物体の運動とは，視覚的には，時刻 (時間) の進行とともに，物体がその位置を変えていく現象である[*1]．したがって，物体の運動を数学的に記述するためには，まず，物体の運動が行われる空間 — 物理的空間 — の数学的概念および時刻を要素とする集合，すなわち，**時刻空間**の数学的概念を見出すことが必要である[*2]．

ニュートン力学では，日常的な素朴実在論的表象に基づいて，物理的空間は 3 次元ユークリッド空間としての $\mathbb{R}^3$ によって，また，時刻空間は 1 次元ユークリッド空間としての $\mathbb{R}$ によって表されると仮定される[*3]．さらに，物理的空間と時刻空間は独立であることも仮定される．こうして，ニュートン力学では，時刻空間と物理的空間とをあわせた "空間"，すなわち，**時空**の数学的概念は，時刻空間 $\mathbb{R}$

[*1]もちろん，時刻が変化しても，物体が静止し続ける場合もありうる．このような場合も広義の意味で運動として扱う．

[*2]「時刻空間」という言葉は，標準的なものではなく，便宜上，筆者が試みに導入したものである．

[*3]n 次元ユークリッド空間としての $\mathbb{R}^n$ は，n 次元実内積空間 (n 次元ユークリッドベクトル空間) としての $\mathbb{R}^n$ を基準ベクトル空間とする計量アファイン空間である (付録 C, C.5 節を参照)．物理的空間および時刻空間をそれぞれ，ユークリッドベクトル空間としての $\mathbb{R}^3$ および $\mathbb{R}$ ではなく，計量アファイン空間として捉えるのは，物理的空間および時刻空間において，先験的には，その中のどの点も "対等" であると考えるのが自然だからである (ベクトル空間にあっては，零ベクトルが特別の意味と位置を占める)．平たくいえば，先験的には，空間の中に何らかの "中心点" を想定しないということである．だが，これは別の見方をすれば，空間のどの点も "中心" たり得るということでもある．

と物理的空間 $\mathbb{R}^3$ の直積 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ によって与えられる．この時空は，より正確に述べるならば，1次元ユークリッドベクトル空間としての $\mathbb{R}$ と3次元ユークリッドベクトル空間としての $\mathbb{R}^3$ の直和 $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^3$ — したがって，それは4次元ユークリッドベクトル空間 (付録CのC.4節を参照) — を基準ベクトル空間とする4次元の計量アファイン空間である[*4]．

ところで，所与の感覚的現実に直接結びついている概念だけを用いて，現象を考察するのでは，現象とその理(ことわり)について皮相的・表層的な見方しかできない．つまり，その種の方法では，現象の本源に関わる普遍的で根源的な理念に到達することはできないのである．そこで，以下では，物理的空間の数学的概念として，一般の d 次元ユークリッド空間 — (抽象的)d 次元ユークリッドベクトル空間 V (d 次元の実内積空間) を基準ベクトル空間とする計量アファイン空間 — を採用する．したがって，時空は

$$V_{\mathrm{N}} := \mathbb{R}\oplus\mathsf{V} \tag{2.1}$$

を基準ベクトル空間とする $(d+1)$ 次元の計量アファイン空間 $\mathscr{A}(V_{\mathrm{N}})$ である[*5]．これを**ニュートン力学的時空**と呼ぶ．時空 $\mathscr{A}(V_{\mathrm{N}})$ の点を，ニュートン力学的な意味での**世界点**または**事象**と呼ぶ．

このような一般的設定を理論の出発点に据える利点は，主に次の点にある：(1) 空間次元および座標から自由な認識，すなわち，ある種の普遍的・絶対的認識に到達しうる[*6]; (2) $d=3$ の場合と $d\neq 3$ の場合における理論的内容の違いを考察することにより，$d=3$ の場合の特殊事情を明晰に認識することが可能になる．こうした認識の方がより普遍的であり，自然哲学的な意味においても満足のいくものであることは明らかであろう[*7]．

[*4]直和ベクトル空間としての $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^3$ を基準ベクトル空間とするアファイン空間 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ は，$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^3$ に導入される計量に応じて，種々の計量アファイン空間になることに注意．

[*5]添字「N」は「Newton (ニュートン)」の意．

[*6]物理学の多くの教科書のように，座標表示を用いると具体的でわかりやすいように見えるのであるが，その代償として，相対的な次元に留まることになる．そのため，理論の普遍的・絶対的本質を把握するのが困難になる．だが，これでは，哲学的に不十分であるといわねばならない．

[*7]上述のニュートン力学的時空の概念は，筆者の構想する自然哲学的観点からいえば，巨視的的現象に関わる時空的知覚に対する部分的理念を捉えたものである．したがって，当然のことながら，それが，あらゆる現象領域にわたって支配的であることは保証されない．実際，20世紀の初めにアインシュタインによって打ち立てられた特殊相対性理論は，そのことを如実に示した (本書の第4章を参照).

2.2 ニュートンの運動方程式

ニュートン力学で扱う運動のうちで基礎となるのは，その質量が 1 点に集中しているとみなせる物体，すなわち，**質点**の運動である．質点が空間の中を運動するということは，質点の位置が時刻とともに変化するということである．するとこの変化に伴って，質点は，空間内に 1 つの軌跡を描く．この描像を数学的にきちんと記述するために，時空 $\mathscr{A}(V_{\mathrm{N}})$ の中に 1 つの点 O をとろう．これは，物理的には，運動の観測の基点を 1 つ定めることに対応する (しかし，座標はまだ設定されていないことに注意)．点 O に関する，$\mathscr{A}(V_{\mathrm{N}})$ の点の位置ベクトルの全体はベクトル空間 V_{N} と自然な仕方で同一視される (付録 B の B.3 節を参照)．この同一視においては，V_{N} の原点 (零ベクトル) と点 O が同一視される．こうして，ニュートン力学的時空 $\mathscr{A}(V_{\mathrm{N}})$ の点は V_{N} の点によって記述される．この場合，時刻 $t\in\mathbb{R}$ とベクトル $x\in\mathsf{V}$ から定まる事象 $(t,x)\in V_{\mathrm{N}}$ は，時刻 t において質点が位置 x にあることを表す．したがって，時刻が t である事象の全体は

$$\mathscr{E}_t := \{(t,x)\in V_{\mathrm{N}}\,|\,x\in\mathsf{V}\} \tag{2.2}$$

によって与えられる．これを**時刻 t における事象空間**という．そして，この型の空間を総称的に**同時事象空間**と呼ぶ．

同時事象空間 $\mathscr{E}_t$ の任意の 2 点 $A=(t,x), B=(t,y)$ に対して，非負の実数 $\rho(A,B)$ を

$$\rho(A,B) := \|x-y\|_{\mathsf{V}} \tag{2.3}$$

によって定義する．ただし，$\|\cdot\|_{\mathsf{V}}$ は V のノルムである．ρ を**同時事象間の距離**という．

また，任意の事象 $A=(t,x), B=(s,y)\in V_{\mathrm{N}}$ に対して定義される量

$$\delta_{\mathrm{time}}(A,B) := t-s \tag{2.4}$$

を事象 B から事象 A への**時間間隔**という．これは，時間の "向き" も考慮に入れた定義であることに注意しよう．

3 つ組 $(\mathscr{A}(V_{\mathrm{N}}),\rho,\delta_{\mathrm{time}})$ を**時空のガリレイ構造**と呼ぶ．

さて，質点の運動がなされる時間の幅は，時刻空間としての $\mathbb{R}$ の区間で表されるとし，これを**時間区間**と呼ぶ[*8]．時間区間を $\mathbb{I}$ とし，時刻 t での質点の位置を

[*8] 本書で $\mathbb{R}$ の区間という場合には，次のいずれかを指す (a,b は $a<b$ を満たす実数とする)：(i) 開区間 (a,b)．(ii) 閉区間 $[a,b]$．(iii) 半開区間 $(a,b], [a,b)$．(iv) 半無限区間 $(-\infty,a), (-\infty,a], (a,\infty), [a,\infty)$．(v) $\mathbb{R}$．

$X(t) \in \mathsf{V}$ としよう．このとき，V の部分集合 $\{X(t) | t_0 \leq t \leq t_1\}$ $(t_0, t_1 \in \mathbb{I}, t_0 < t_1)$ は時刻 t_0 から時刻 t_1 までに質点が描いた軌跡を与える．したがって，質点の運動は，純数学的に見ると，各時刻 $t \in \mathbb{I}$ にその位置ベクトル $X(t) \in \mathsf{V}$ を対応させることである．つまり，これは，時間区間 $\mathbb{I}$ から，V への写像，すなわち，V の中に値をとる $\mathbb{I}$ 上のベクトル値関数に他ならない．通常の視覚に映ずる限り，質点の運動は "連続的" であるように見える．そこで，作業仮説として，運動を記述する写像は数学的には連続であると仮定する．この写像を**質点の運動曲線**または**運動**と呼び，その像を質点の**軌道** (orbit) という[*9]．すると，対応：$t \longmapsto (t, X(t)) \in V_{\mathrm{N}}$ は時間区間から時空への連続写像，すなわち，時空上の曲線を定める．この型の曲線，すなわち，運動のグラフをその像とする曲線を**世界線**と呼ぶ[*10]．

そこで，次に問うべきは，世界線あるいは運動曲線の生成の仕方を根源的に統制する何らかの原理があるであろうか，ということである．結論からいえば，この問いに対する答えは肯定的であり，この節の主題であるニュートンの運動方程式がそれである．

以下，運動曲線については，必要な微分可能性はつねに仮定する[*11]．運動曲線 $X : \mathbb{I} \longrightarrow \mathsf{V}$ の導関数

$$v(t) := \frac{dX(t)}{dt} = \lim_{s \to 0} \frac{X(t+s) - X(t)}{s}, \quad t \in \mathbb{I} \tag{2.5}$$

を質点の**速度** — より厳密には**瞬間速度** — と呼ぶ[*12]．なお

$$\frac{dX(t)}{dt} = X'(t) = \dot{X}(t)$$

という記法も用いる場合がある (したがって，$v(t) = \dot{X}(t)$ とも書かれる)．速度 $v : \mathbb{I} \longrightarrow \mathsf{V}$ の時刻 t での値 $v(t)$ を時刻 t での**速度ベクトル**という．

速度 $v : \mathbb{I} \longrightarrow \mathsf{V}$ がわかれば，$v(t) = dX(t)/dt$ の両辺を積分することにより，時刻 $t \in \mathbb{I}$ における位置ベクトル $X(t)$ は

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{I} \tag{2.6}$$

[*9] V における曲線は，通常，$\mathbb{R}$ の有界閉区間から V への連続写像のことを指す (付録 D の D.1 節を参照)．だが，ここでは，言葉を拡張して使う．すなわち，$\mathbb{R}$ の区間から計量ベクトル空間 W への連続写像を W 上の**曲線**と呼ぶ．

[*10] 写像のグラフの定義については，付録 A を参照．

[*11] 曲線の微分や積分の概念については，付録 D を参照．

[*12] 曲線の導関数については，付録 D を参照．

というふうに求められる[*13]．ただし，t_0 は $\mathbb{I}$ の中の任意に固定された点であり，総称的に**初期時刻**と呼ばれる．これは，速度 $v:\mathbb{I}\longrightarrow\mathsf{V}$ と初期時刻 t_0 での位置 — **初期位置** — $X(t_0)$ が指定されれば，任意の時刻 $t\in\mathbb{I}$ での位置ベクトル $X(t)$ がわかること，したがって，運動の軌道を完全に知ることができることを意味する．ここで，初期位置 $X(t_0)$ の指定には任意性があることに注意しよう．

次の問題は，瞬間速度を決める対象を見出すことである．だがこれは，上の議論で，X の役割を v に代えれば，v の導関数

$$a(t):=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d^2X(t)}{dt^2} \tag{2.7}$$

であることはただちにわかる．$a(t)$ を時刻 t における質点の**加速度**という．(2.6) の場合と同様に

$$v(t)=v(t_0)+\int_{t_0}^{t}a(s)\,ds,\quad t\in\mathbb{I} \tag{2.8}$$

が得られる．したがって，加速度がわかり $t=t_0$ での速度 — **初期速度** — $v(t_0)$ が指定されれば，速度がわかることになる．初期位置の場合と同様，初期速度の指定についても任意性がある．

そこで，加速度は何から決定されるかということが問題になるが，結論からいえば，それは質点に働く力からである[*14]．よりくわしく述べるならば，時刻 t での加速度 $a(t)$ は，時刻 t での質点の位置において質点に作用する力に比例することが実験的に見出される．ニュートン力学では，この実験事実を基本原理の 1 つとして立て，これを**ニュートンの運動の法則** (第 2 法則) と呼ぶ．ところで，力は V のベクトルで表される．質点が位置 $x\in\mathsf{V}$ にあるときに働く力を $F(x)\in\mathsf{V}$ と書き，ニュートンの運動の法則にいう比例定数を $1/m$ $(m>0)$ としよう．すると，ニュートンの運動の法則は

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2}=F(X(t)) \tag{2.9}$$

という形に表される[*15]．ここに現れた定数 m は**慣性質量** (inertial mass) と呼ばれる (以下，単に**質量**という)．(2.9) を**ニュートンの運動方程式**という．

[*13] ベクトル値関数の積分については，付録 D を参照．

[*14] これは日常的な観察からも推測することができる．

[*15] 質点に働く力は，質点の位置だけでなく，その速度にも依存する場合もある．その場合は，力を $F(x,v)$ のように表す (v は，質点の位置 x での速度を表す)．だが，いまは，簡単のため，位置だけに依存する力のみを考察する．

与えられた力 $F(x)$ の作用のもとにおける可能な運動を見出すには，ニュートンの運動方程式 (2.9) を満たす曲線 X — これを (2.9) の**解**と呼ぶ — を求めればよい．他方，$X(t)$ が知られている場合には，(2.9) の左辺を具体的に計算することにより，そこに働いている力を推測することが可能である．このように，ニュートンの運動方程式は両義的に使うことができる．

運動方程式 (2.9) は，その定義から明らかなように，空間座標 — V の座標 — の取り方によらない形をしていることに注意しよう[*16]．これをニュートンの運動方程式の**空間的絶対形式**と呼ぶ[*17]．

ところで，質点に作用する力 $F(x)$ が定義される x の範囲 — $D\subset$ V としよう — は，V 全体であるとは限らない．すると，ニュートンの運動方程式 (2.9) の右辺が意味を持つためには，$X(t)\in D$ でなければならない．したがって，質点の軌跡は D 内にあることになる．そこで，D を，考察下の質点の運動の**配位空間**という．対応 $F:D\ni x\longmapsto F(x)\in$ V を考えると，これは D から V への写像を定める．

一般に，V の部分集合 Ω から V への写像は **Ω 上のベクトル場**（ば）と呼ばれる．

この用語を用いると，質点に働く力の総体は，配位空間上のベクトル場としてとらえられることになる．このベクトル場を**力場**（りきば）または**力の場**と呼ぶ．

質点の運動が連続的あることを考慮すると，力場 F の定義域，すなわち，配位空間 D は V の開集合であり，かつ F は D 上で連続であると仮定するのが自然である[*18]．以下，一般論における力場については，この仮定をおく．

力場の基本的な例をあげよう．

例 2.1 $k>0$ を定数として，$F_{\rm lin}(x):=-kx$ $(x\in$ V$)$ によって定義される力場 $F_{\rm lin}$ を**線形復元力の場**という[*19]．この型の力は，たとえば，バネに結ばれた質点がバネから受ける力として具現する．実際，バネの伸び $r>0$ が "十分小さい" ならば，質点は kr の大きさの引力をバネから受ける．ここに現れる定数 k はバネ定数と呼ばれる．定義から明らかなように，力場 $F_{\rm lin}$ のもとにおける質点の運動の配位空間は V 全体である．$F_{\rm lin}$ の連続性も容易に確かめられる．

[*16] ベクトル空間の座標の概念については，付録 B を参照．

[*17] これは，標準的な術語ではなく，筆者がここで初めて導入するものである．なお，F が速度にも依存する場合には，(2.9) の右辺は，$F(X(t),v(t))$ という形をとる．

[*18] V の開集合およびベクトル場の連続性の定義については，付録 C を参照．

[*19] "線形" (linear) は，$F_{\rm lin}(x)$ が x に比例することを表す．また，"復元" は，力の向きが x のそれと反対であること (マイナスの符号に注意) にちなむ．

例 2.2 $Z \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ を定数として

$$F_Z(x) := \frac{Zx}{\|x\|^3}, \quad x \in \mathsf{V}\setminus\{0\} \tag{2.10}$$

によって定義される力場 $F_Z : \mathsf{V}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathsf{V}$ を**クーロン型の力場**という．この場合の配位空間は $\mathsf{V}\setminus\{0\}$ であり，これは開集合である．この集合上での F_Z の連続性を確かめるのも難しくない．

具体例 $d=3$ の場合を考える．

(i) V の原点に質量 $M>0$ の質点が固定されているとする．このとき，位置 $x \in \mathsf{V}\setminus\{0\}$ にある質量 m の質点が M から受ける力は

$$F_{\mathrm{u}}(x) := -G\frac{Mmx}{\|x\|^3}$$

で与えられる (**万有引力の法則**)．ただし，G は万有引力定数と呼ばれる物理定数である．$F_{\mathrm{u}}(x)$ を**万有引力**という．これは，F_Z において $Z=-GMm$ の場合である．

(ii) 一般に，電荷を持つ質点を**荷電粒子**という．V の原点に電荷 $Q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ の荷電粒子が固定されているとする．このとき，位置 $x \in \mathsf{V}\setminus\{0\}$ にある，電荷が q の荷電粒子が電荷 Q から受ける力は

$$F_{\mathrm{C}}(x) := \frac{Qqx}{4\pi\varepsilon_0\|x\|^3} \tag{2.11}$$

で与えられる (**クーロンの法則**)．ただし，ε_0 は真空の誘電率と呼ばれる物理定数である．$F_{\mathrm{C}}(x)$ を**電気的クーロン力**という．これは，F_Z において $Z=Qq/(4\pi\varepsilon_0)$ の場合である．

ニュートンの運動方程式の空間的絶対形式は，以下において例証されるように，ニュートンの運動方程式が有する普遍的構造を，いちいち，座標などという非本質的対象に煩わされることなく，直接見出すことを可能にする．とはいえ，具体的な問題を解く場合には，その問題に応じて，適切な座標系をとることにより解析がより容易になる場合がある．そこで，比較のために，ニュートンの運動方程式の空間的絶対形式からどのようにして座標を用いた表示が得られるかを示しておこう．

まず，V の基底 $E := \{e_1, \cdots, e_d\}$ $(e_j \in \mathsf{V})$ を 1 つ選ぶ．このとき V の任意の点 $x \in \mathsf{V}$ は，基底 E に関して

$$x=\sum_{i=1}^{d} x^i e_i \tag{2.12}$$

と展開される．展開係数 $x^i \in \mathbb{R}$ $(i=1,\cdots,d)$ の組 $(x^1,\cdots,x^d)\in\mathbb{R}^d$ は，点 x の**基底 E に関する座標**と呼ばれる．x^i を x の**第 i 成分**という．無論，点 x の座標は，基底の取り方を変えれば，変化する (点 x は変化しない)*20．この意味で，座標は相対的なのである．時刻 t における位置 $X(t)\in\mathsf{V}$ の基底 E に関する座標を $(X^1(t),\cdots,X^d(t))\in\mathbb{R}^d$ とすれば

$$X(t)=\sum_{i=1}^{d} X^i(t)e_i. \tag{2.13}$$

ここで，$X(t)$ の各成分 $X^i(t)$ $(i=1,\cdots,d)$ は，t の実数値関数を与えることに注意しよう．

同様に，力場 F は

$$F(x)=\sum_{i=1}^{d} F^i(x)e_i \tag{2.14}$$

と展開される．この場合，$F(x)$ の第 i 成分 $F^i(x)$ は x の実数値関数を与える．これは，x の座標表示を通して，$(x^1,\cdots,x^d)$ の実数値関数と見ることができる．この関数を $\widetilde{F}^i(x^1,\cdots,x^d)$ と記す：

$$\widetilde{F}^i(x^1,\cdots,x^d):=F^i\left(\sum_{i=1}^{d} x^i e_i\right). \tag{2.15}$$

(2.13) と (2.14) を (2.9) に代入し，$e_1,\cdots,e_d$ の線形独立性を用いると

$$m\frac{d^2X^i(t)}{dt^2}=\widetilde{F}^i(X^1(t),\cdots,X^d(t)),\quad i=1,\cdots,d \tag{2.16}$$

という d 個の連立常微分方程式が得られる．これをニュートンの運動方程式の**空間的座標形式**と呼ぶ*21．

力場 $F:D\longrightarrow\mathsf{V}$ が与えられたとしよう．このとき，(2.9) と (2.8) によって

$$v(t)=v(t_0)+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(X(s))\,ds. \tag{2.17}$$

これを (2.6) に代入すれば

$$X(t)=X(t_0)+v(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s} F(X(s'))\,ds'\right)ds. \tag{2.18}$$

---

*20 基底の取り方に応じた座標の変化の仕方を記述するのが，座標変換の式である．付録 B を参照．

*21 これも標準的な術語ではなく，筆者が試みに導入するものである．

これは，ニュートンの運動方程式 (2.9) の解 X が満たすべき積分方程式である．逆に，曲線 X が積分方程式 (2.18) の解ならば，X はニュートンの運動方程式 (2.9) の解である．

(2.18) から，$X(t)$ を一意的に決めるには，初期位置 $X(t_0)$ と初期速度 $v(t_0)$ を指定する必要のあることがわかる．初期位置と初期速度の組 $(X(t_0),v(t_0))$ を微分方程式 (2.9) に関する**初期条件**または**初期値**という．初期条件を与えて微分方程式 (2.9) の解を求める問題を (2.9) の**初期値問題**と呼ぶ．ここで，一言注意するならば，(2.9) の初期値問題の解はつねに存在するとは限らないし，その解が存在する場合でも，解が初期値に対して唯ひとつ定まるとは限らない．これらは，いずれも力場 F の性質に依存する．しかし，与えられた初期値に対して (2.9) の解が唯ひとつ存在する場合，(2.9) の解は**一意的**であるという．

初期値問題に対して (2.9) の解の一意性が成立する場合には，$t=t_0$ での初期値 $(X(t_0),v(t_0))$ から，任意の時刻 t に対して位置 $X(t)$ が一意的に定まり，したがって，その導関数である速度 $v(t)$ も一意的に定まることになる ($\because$ (2.17) を参照)．すなわち任意の時刻 t での位置と速度の組 $(X(t),v(t))$ が一意的に定まる．このことを考慮すると，質点系の状態，すなわち，質点の運動を特徴づける対象は，位置と速度の組で与えられるという仮説へといたる[22]．そこで，あらゆる可能な運動を考慮して，配位空間 D とベクトル空間 V (この V は速度ベクトルや力場のベクトルが属するベクトル空間と解釈する) との直積空間 $D\times\mathsf{V}$ の点 (x,v) $(x\in D, v\in\mathsf{V})$ を考察下の質点系の**状態**と呼び，$D\times\mathsf{V}$ を**状態空間**または**相空間**という．この観点からは，初期値 $(X(t_0),v(t_0))$ を**初期状態**，$(X(t),v(t))$ を**時刻 t での状態**と呼ぶ．

質量 m と速度ベクトル $v(t)$ の積

$$p(t):=mv(t) \tag{2.19}$$

を**運動量** (momentum) と呼ぶ．これを用いると，方程式 (2.9) は

$$\frac{dp(t)}{dt}=F(X(t)) \tag{2.20}$$

という形をとる．状態の記述には，位置と運動量の組 $(X(t),p(t))$ を用いることもできる．

(2.9) を満たす曲線 X, すなわち微分方程式 (2.9) の解は，力場 F のもとで可能

---

[22] 一意性が成立しない場合は例外的な場合と考える．

な運動の曲線を表し，逆に，力場 F のもとで可能な運動を表す曲線は，微分方程式 (2.9) の解である (公理).

いうまでもなく，上述の力学原理を具体的な物体の運動に応用するには，その運動を支配する具体的な力場 F に対して，運動方程式 (2.9) の解を求めることが第一の課題となる．だが，この方向の展開は，物理学の教科書や文献に譲る*23. ここで行いたいことは，運動方程式 (2.9) の解を具体的に求めなくてもわかる事柄を探究することである．いいかえれば，ニュートンの運動方程式 (2.9) の解の構造に関する普遍的な側面を調べるということである．このための1つの鍵概念となるのが対称性なのである．

第1章で見たように，対称性は，第一義的には，集合に関わるものである．そこで，(2.9) の解をすべて集めてできる集合

$$\mathsf{S}_F(\mathbb{I},D) := \left\{ X:\mathbb{I}\longrightarrow D \;\middle|\; \begin{array}{l} X \text{ は } \mathbb{I} \text{ 上で 2 回連続微分可能} \\ \text{かつ (2.9) を満たす} \end{array} \right\} \tag{2.21}$$

を考える．これを**時間区間 $\mathbb{I}$ におけるニュートンの運動方程式 (2.9) の解空間**と呼ぶ．特に，時間区間が $\mathbb{R}$ 全体の場合の解空間を $\mathsf{S}_F(D)$ と書く：

$$\mathsf{S}_F(D) := \mathsf{S}_F(\mathbb{R},D). \tag{2.22}$$

次の節から，この解空間の対称性を調べる．それによって，運動方程式 (2.9) の解を具体的に求めなくても，物理的に重要な結論を得ることが可能であることが示される．

2.3 時間に関する対称性

この節では，ニュートンの運動方程式 (2.9) に関わる対称性のうちで時間に関するものをみてゆく．

2.3.1 時間並進対称性

ニュートン力学のコンテクストにおいて，実数体 $\mathbb{R}$ を時間軸と解釈するとき，$\mathbb{R}$ 上の並進群

$$\mathscr{T}_{\mathbb{R}} = \{T_a \,|\, a\in\mathbb{R}\} \cong \mathbb{R} \tag{2.23}$$

---

*23 拙著『物理現象の数学的諸原理』(共立出版，2003) の第4章も参照.

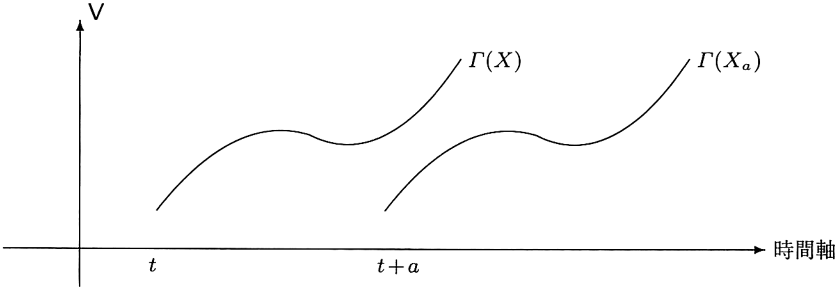


図 **2.1**　X と X_a のグラフ ($a>0$ の場合).

を**時間並進群**と呼び，その各要素 T_a を a **秒の並進**という．各 $a\in\mathbb{R}$ と $\mathbb{I}$ に対して，集合 $\mathbb{I}+a$ を

$$\mathbb{I}+a:=\{t+a|t\in\mathbb{I}\} \tag{2.24}$$

によって定義し，これを $\mathbb{I}$ **の** a **による並進**と呼ぶ.

一般に，$\mathbb{I}$ から V への写像 X に対して，写像 $X_a:\mathbb{I}+a\longrightarrow \mathsf{V}$ を

$$X_a(t):=X(t-a),\quad t\in\mathbb{I}+a \tag{2.25}$$

によって定義する．描像的にいえば，曲線 X_a のグラフ

$$\Gamma(X_a)=\{(t,X_a(t))\,|\,t\in\mathbb{I}+a\}\subset\mathbb{R}\times\mathsf{V}$$

は，曲線 X のグラフ

$$\Gamma(X)=\{(t,X(t))\,|\,t\in\mathbb{I}\}$$

をベクトル $(a,0)\in\mathbb{R}\oplus\mathsf{V}$ によって平行移動したものである (図 2.1)*24．すなわち

$$T_{(a,0)}(\Gamma(X))=\Gamma(X_a).$$

ただし，ここでの T_v ($v\in\mathbb{R}\oplus\mathsf{V}$) は，$\mathbb{R}\oplus\mathsf{V}$ におけるベクトル v による並進を表す：$T_v(t,x):=(t,x)+v$ ($(t,x)\in\mathbb{R}\oplus\mathsf{V}$)．そこで，$X_a$ を**時間** a **による** X **の並進**と呼ぶ.

命題 2.3　曲線 $X:\mathbb{I}\longrightarrow D\subset\mathsf{V}$ がニュートンの運動方程式 (2.9) の解ならば，任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して，$X_a:\mathbb{I}+a\longrightarrow D$ は区間 $\mathbb{I}+a$ における運動方程式 (2.9) の解である．すなわち，$X_a\in\mathsf{S}_F(\mathbb{I}+a,D)$.

---

*24 写像のグラフの定義については，付録 A を参照.

証明 合成関数の微分法により

$$\frac{dX_a(t)}{dt} = \dot{X}(t-a)\frac{d(t-a)}{dt} = \dot{X}(t-a).$$

したがって，また，$d^2X_a(t)/dt^2 = \ddot{X}(t-a)$ ($\ddot{X}$ は X の 2 階導関数を表す．付録 D, D.1 節を参照)．仮定により $\ddot{X}(t-a) = m^{-1}F(X(t-a)) = m^{-1}F(X_a(t))$．したがって

$$m\frac{d^2X_a(t)}{dt^2} = F(X_a(t)).$$

ゆえに題意がしたがう． ■

この命題の物理的意味は次の通りである：力場 F の作用のもとで，時間区間 $\mathbb{I}$ において，曲線 X によって表される運動が可能ならば，同じ力場 F の作用のもとで，時間区間 $\mathbb{I}+a$ においても空間的に同一の運動 (同一の軌道を持つ運動) が可能である．これは，1 つの力場のもとで実現する運動が時間区間の取り方に独立であること — したがって，特に，時間軸の原点 (時刻 0) の取り方によらない — ことを語るものである．この性質を**ニュートンの運動方程式にしたがう運動の時間並進対称性**と呼ぶ．

ニュートンの運動方程式の時間並進対称性は，解空間の対称性としては，次に述べる定理の形をとる．区間 $\mathbb{I}$ から V への写像の全体を $\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})$ とする (1.6.2 項を参照．(1.45) で $\mathsf{X}=\mathbb{I}$ の場合)．a 秒の時間並進 T_a に対して，写像 $\hat{T}_a$: $\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V}) \longrightarrow \mathscr{M}(\mathbb{I}+a,\mathsf{V})$ を

$$\hat{T}_a X = X_a, \quad X \in \mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V}) \tag{2.26}$$

によって定義する[*25]．

定理 2.4 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\hat{T}_a(\mathsf{S}_F(\mathbb{I},D)) = \mathsf{S}_F(\mathbb{I}+a,D). \tag{2.27}$$

特に

$$\hat{T}_a(\mathsf{S}_F(D)) = \mathsf{S}_F(D). \tag{2.28}$$

証明 $X \in \hat{T}_a(\mathsf{S}_F(\mathbb{I},D))$ とすれば，$X = \hat{T}_a Y = Y_a$ となる $Y \in \mathsf{S}_F(\mathbb{I},D)$ がある．命題 2.3 によって，$X \in \mathsf{S}_F(\mathbb{I}+a,D)$ である．したがって $\hat{T}_a(\mathsf{S}_F(\mathbb{I},D)) \subset \mathsf{S}_F(\mathbb{I}+a,D)$．逆に $X \in \mathsf{S}_F(\mathbb{I}+a,D)$ ならば，命題 2.3 によって $X_{-a} \in \mathsf{S}_F(\mathbb{I},D)$ であり，$\hat{T}_a X_{-a} =$

[*25] 1.6.2 項のはじめの部分を参照．

X. したがって，$\mathsf{S}_F(\mathbb{I}+a,D)\subset\hat{T}_a(\mathsf{S}_F(\mathbb{I},D))$. よって，(2.27) が成り立つ.

(2.28) は，$\mathbb{I}=\mathbb{R}$ ならば $\mathbb{I}+a=\mathbb{R}$ という事実と (2.27) による. ■

集合の等式 (2.28) は，各 $a\in\mathbb{R}$ に対して，$\mathsf{S}_F(D)$ が $\mathscr{M}(\mathbb{R},\mathsf{V})$ の部分集合として，$\hat{T}_a$ 対称性を持つことを意味する[*26]. これを運動の**大局的時間並進対称性**という.

2.3.2 時間反転対称性

$\mathbb{I}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{I}=[\alpha,\beta]$ の場合を考える. 実数 p を次のように定義する：

$$p=\begin{cases}\dfrac{\alpha+\beta}{2}, & \mathbb{I}=[\alpha,\beta] \text{ の場合},\\ \mathbb{R} \text{ の任意の点}, & \mathbb{I}=\mathbb{R} \text{ の場合}\end{cases}$$

写像 $r_p:\mathbb{I}\longrightarrow\mathbb{I}$ を

$$r_p(t):=2p-t,\quad t\in\mathbb{I} \tag{2.29}$$

によって定義する. この写像を**時刻 p に関する時間反転**という.

容易にわかるように，r_p は全単射であり

$$r_p^2=I_{\mathbb{I}},\quad r_p^{-1}=r_p \tag{2.30}$$

を満たす. ただし，$I_{\mathbb{I}}$ は $\mathbb{I}$ 上の恒等写像である. したがって，$\{I_{\mathbb{I}},r_p\}$ は $\mathbb{I}$ 上の変換群である. これを**時間反転群**という.

写像 $\hat{r}_p:\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})\longrightarrow\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})$ を

$$(\hat{r}_pX)(t):=X(r_p^{-1}(t))=X(2p-t),\quad t\in\mathbb{I},X\in\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V}) \tag{2.31}$$

と定義すれば

$$\mathscr{T}_{\mathrm{r}}:=\{I,\hat{r}_p\} \tag{2.32}$$

は $\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})$ 上の変換群である (I は $\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})$ 上の恒等写像).

$\mathbb{I}=[\alpha,\beta]$ の場合，任意の $X\in\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})$ に対して

$$(\hat{r}_pX)(\alpha)=X(\beta),\quad (\hat{r}_pX)(\alpha+t)=X(\beta-t),\quad t\in[0,\beta-\alpha]$$

であるので，曲線 $\hat{r}_pX$ は，物理的には，曲線 X による運動を逆向きに辿る運動を表す (図 2.2). そこで，$\hat{r}_pX$ を**時刻 p に関する X の時間反転**と呼ぶ.

定理 2.5 任意の $X\in\mathsf{S}_F(\mathbb{I},D)$ に対して，$\hat{r}_pX\in\mathsf{S}_F(\mathbb{I},D)$.

[*26] 定義 1.56 を参照.

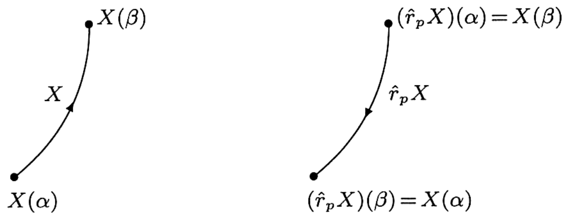


図 **2.2** 時間反転.

証明 $Y := \hat{r}_p X$ とおくと，合成関数の微分法により

$$\frac{dY(t)}{dt} = \dot{X}(2p-t)\frac{d}{dt}(2p-t) = -\dot{X}(2p-t). \tag{2.33}$$

したがって，また

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} = (-1)^2\ddot{X}(2p-t) = \ddot{X}(2p-t).$$

一方，$X \in \mathsf{S}_F(\mathbb{I}, D)$ ならば，$m\ddot{X}(2p-t) = F(X(2p-t)) = F(Y(t))$. したがって

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} = F(Y(t)).$$

ゆえに $Y \in \mathsf{S}_F(\mathbb{I}, D)$. ■

この定理は，物理的には，次のことを意味する：**力場 F の作用のもとで，時間区間 $\mathbb{I}$ においてある運動が実現するならば，同じ力場 F の作用のもとで，それを逆向きに辿る運動も可能である**．これを運動の**時間反転対称性**または**時間的可逆性**という.

この対称性について，若干の注意をしておこう.

(i) ここで定義された運動の時間反転なる概念は，“時間的に過去に遡る” ということを表すものではない．それは，上に説明した，曲線 $\hat{r}_p X$ の意味から明らかであろう．呼称にとらわれないように注意されたい.

(ii) 通常の多くの運動において，そのままでは — つまり，なりゆきにまかせているだけでは — 当該の運動を逆向きに辿る運動は自動的には生じない．これは，逆向きの運動に対する初期条件の設定，すなわち，ある位置で速度を逆向きにすること — $d\hat{r}_p X/dt = -\dot{X}(2p-t)$ (式 (2.33) に注意) — が自動的に起こることがまれだからである[*27]．この点に注目することにより，ニュートンの運動方程

[*27] 理想的な振り子の運動とか摩擦のない地面に完全弾性体が真空中を垂直に落下する場合には，逆

式が時間的可逆性を持つにもかかわらず，なぜ，“自然” のままでは，逆向きの運動が自動的には生じにくいかが理論的に理解される．この事情は多体系 — 複数の質点からなる系 — の場合にもあてはまる．こうして，ニュートン力学が適用されうる現象の範疇において，なぜ，現象的レヴェルでは，多くの場合，1 つの方向の運動のみが支配的であり，時間反転対称性が破れているように見えるのか，という問いに対する 1 つの解答が与えられる．

2.3.3 保存量

一般に，質量 m を持つ 1 個の質点からなる系の物理量は，状態空間 $D\times\mathsf{V}$ 上の実数値関数やベクトル値関数あるいはテンソル値関数で与えられる (公理).

例 2.6 $\|\cdot\|$ を V のノルムとして

$$T(v):=\frac{m}{2}\|v\|^2,\quad v\in\mathsf{V} \tag{2.34}$$

によって定義される非負値関数 $T:\mathsf{V}\longrightarrow\mathbb{R}$ を**運動エネルギー**と呼ぶ．これは，位置変数 $x\in D$ によらない物理量の基本的な例である．

例 2.7 もし

$$F=-\mathrm{grad}\,V \tag{2.35}$$

— $\mathrm{grad}\,V$ は V の勾配ベクトル場[*28] — を満たす連続微分可能な実数値関数 (スカラー場) $V:D\longrightarrow\mathbb{R};D\ni x\longmapsto V(x)\in\mathbb{R}$ が存在するならば，V を力場 F の**ポテンシャルエネルギー**または単に**ポテンシャル**と呼ぶ．この場合，力場 F はポテンシャル V を持つといい，この型の力を**ポテンシャル力**と呼ぶ．これは，速度変数 $v\in\mathsf{V}$ によらない物理量の基本的な例である．なお，任意の実定数 c に対して $\mathrm{grad}\,V=\mathrm{grad}\,(V+c)$ であるから，F に対してポテンシャルは一意的に決まらず，定数付加の任意性があることに注意しよう．

例 2.8 線形復元力の場 F_{lin} (例 2.1) はポテンシャルを持つ．実際，$V(x)=k\|x\|^2/2$ $(x\in\mathsf{V})$ によって定義される関数 V は $F_{\mathrm{lin}}=-\mathrm{grad}\,V$ を満たす．

向きの運動を実現するための初期条件の設定が自動的に起こり，(誤差の範囲で) 周期的運動が繰り返されることになる．

*28 付録 D を参照.

例 2.9 クーロン型の力場 F_Z (例 2.2) はポテンシャルを持つ．実際

$$V(x)=\frac{Z}{\|x\|},\quad x\in\mathsf{V}\setminus\{0\}$$

によって定義される関数は $F_Z=-\mathrm{grad}\,V$ を満たす (問題 1)．この型のポテンシャルを**クーロン型ポテンシャル**という．

例 2.10 $p=mv$ $(v\in\mathsf{V})$ とする．これを**運動量**と呼ぶ．これは，x によらないベクトル値の物理量の例である．

例 2.11 $\overset{2}{\wedge}\mathsf{V}$ によって，V に関する 2 階の反対称テンソルの空間を表す[*29]．位置 x と運動量 p の反対称テンソル

$$M(x,p):=x\wedge p,\quad (x,p)\in D\times\mathsf{V} \tag{2.36}$$

によって定義されるテンソル値関数 $M:D\times\mathsf{V}\longrightarrow\overset{2}{\wedge}\mathsf{V}$ を**軌道角運動量**と呼ぶ．

f を物理量，すなわち $f:D\times\mathsf{V}\longrightarrow\mathsf{W}$ とする (W はベクトル空間)．$X:\mathbb{I}\longrightarrow D$ をニュートンの運動方程式 (2.9) の任意の解とする．もし，$f(X(t),v(t))$ が $t\in\mathbb{I}$ によらず一定ならば，f をニュートンの運動方程式 (2.9) の**保存量**と呼ぶ．これは，対称性の観点からは，写像 $\tilde{f}:t\longmapsto f(X(t),v(t))$ が時間並進対称性を持つということ，すなわち $\tilde{f}(t-a)=\tilde{f}(t)$ $(t,t-a\in\mathbb{I})$ が成り立つということである．

定理 2.12 (運動量保存則) $F=0$ ならば，運動量 p はニュートンの運動方程式 (2.9) の保存量である．

証明 $F=0$ ならば $dp(t)/dt=0$. したがって，$p(t)$ は $\mathbb{I}$ 上で一定である． ■

定理 2.13 (軌道角運動量の保存則) 力場 F は

$$x\wedge F(x)=0,\quad x\in D \tag{2.37}$$

を満たすとする．このとき，軌道角運動量 $M(x,p)$ はニュートンの運動方程式 (2.9) の保存量である．

証明 $\{e_i\}_{i=1}^d$ を V の任意の基底とし，$x=\sum_{i=1}^d x^i e_i, p=\sum_{i=1}^d p^i e_i$ と展開する $(x^i,p^i\in\mathbb{R})$．テンソル $u\wedge v$ $(u,v\in\mathsf{V})$ の u,v に関する線形性を使えば，$M(x,p)=\sum_{i,j=1}^d x^i p^j e_i\wedge e_j$. そこで，外積の反対称性 $e_i\wedge e_j=-e_j\wedge e_i$ を用いると

[*29] テンソルについては，付録 E を参照．

$$M(x,p)=\sum_{i<j}(x^ip^j-x^jp^i)e_i\wedge e_j \tag{2.38}$$

と書きかえられる．$M(t):=M(X(t),p(t))$ とおけば

$$\dot{M}(t)=\sum_{i<j}(\dot{X}^i(t)p^j(t)+X^i(t)\dot{p}^j(t)-\dot{X}^j(t)p^i(t)-X^j(t)\dot{p}^i(t))e_i\wedge e_j.$$

そこで，$\dot{X}^i(t)=p^i(t)/m$, $\dot{p}^j(t)=F^j(X(t))$ (運動方程式) を用いると

$$\dot{M}(t)=\sum_{i<j}[X^i(t)F^j(X(t))-X^j(t)F^i(X(t))]\,e_i\wedge e_j.$$

右辺は $X(t)\wedge F(X(t))$ に等しく，これは仮定 (2.37) によって零である． ■

力場 F がポテンシャル V を持つ場合を考える．この場合，運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和

$$E(x,v):=T(v)+V(x) \tag{2.39}$$

によって定義される実数値の物理量 $E:D\times\mathsf{V}\longrightarrow\mathbb{R}$ を**全力学的エネルギー**と呼ぶ．これに関して次の定理が成り立つ：

定理 2.14 (力学的エネルギー保存則) 全力学的エネルギー E はニュートンの運動方程式 (2.9) の保存量である．

証明 $E(t):=E(X(t),v(t))$ とおく．このとき，付録 D の定理 D.1 と定理 D.10 によって，$E'(t)=m\langle v'(t),v(t)\rangle+\langle(\mathrm{grad}\,V)(X(t)),v(t)\rangle$．そこで，$mv'(t)=F(X(t))=-(\mathrm{grad}\,V)(X(t))$ を使えば，右辺は 0 であることがわかる．したがって，$E(t)=c$ (定数) となる． ■

2.4 空間的対称性 — 一般論

空間に関するニュートンの運動方程式の対称性は，当然，V に働く変換群と関わる．V 上の一般線形群 GL(V) の各元 A に対して，写像 $L(A):\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})$ (区間 $\mathbb{I}$ から V への写像の全体) $\longrightarrow\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})$ を

$$(L(A)X)(t):=A(X(t)),\quad t\in\mathbb{I}, X\in\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V}) \tag{2.40}$$

によって定義する．A の線形性により，$L(A)$ は線形である．また，$L(A)$ は全単射であることも容易に確かめられる[*30]．したがって，$L(A)=\mathrm{GL}(\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V}))$.

[*30] $L(A)X=L(A)Y$ $(X,Y\in\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V}))$ ならば，$A(X(t))=A(Y(t))$ $(t\in\mathbb{I})$．A は単射であるから，$X(t)=Y(t)$ $(t\in\mathbb{I})$．したがって，$X=Y$．ゆえに $L(A)$ は単射である．次に，任意の $Y\in$

各 $A, B \in \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ とすべての $X \in \mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})$ に対して $(L(A)L(B)X)(t) = A(B(X(t))) = (L(AB)X)(t)$ $(t \in \mathbb{I})$ であるから

$$L(A)L(B) = L(AB) \tag{2.41}$$

が成り立つ．したがって，$\{L(A) | A \in \mathrm{GL}(\mathsf{V})\}$ は群 $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ の $\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})$ 上での表現である (対応 $L: A \longmapsto L(A)$ は $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ から $\mathrm{GL}(\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V}))$ への準同型写像)．特に

$$L(A)^{-1} = L(A^{-1}). \tag{2.42}$$

さて，$X: \mathbb{I} \longrightarrow \mathsf{V}$ を運動曲線とするとき，曲線 $L(A)X: \mathbb{I} \longrightarrow \mathsf{V}$ によって表される運動は，(2.40) の右辺を見ればわかるように，X の軌道を A で写してできる集合を軌道とするような運動である．

力場 $F: \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{V}$ に対して，$F_A: \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{V}$ を

$$F_A(x) := A(F(A^{-1}x)), \quad x \in \mathsf{V} \tag{2.43}$$

によって定義する．これを F の A **変換**と呼ぶ．

$$\mathsf{S}_F(\mathbb{I}) := \mathsf{S}_F(\mathbb{I},\mathsf{V})$$

((2.21) で $D = \mathsf{V}$ の場合) とおく．

命題 2.15 $X \in \mathsf{S}_F(\mathbb{I})$ ならば $L(A)X \in \mathsf{S}_{F_A}(\mathbb{I})$．さらに

$$L(A)\mathsf{S}_F(\mathbb{I}) = \mathsf{S}_{F_A}(\mathbb{I}). \tag{2.44}$$

証明 $X \in \mathsf{S}_F(\mathbb{I})$ としよう．このとき，(2.9) と A の線形性により

$$m\frac{d^2(L(A)X)(t)}{dt^2} = A\left(m\frac{d^2X(t)}{dt^2}\right) = AF(X(t)) = A(F(A^{-1}AX(t))$$
$$= F_A((L(A)X)(t)).$$

したがって，$L(A)X \in \mathsf{S}_{F_A}(\mathbb{I})$．これは $L(A)\mathsf{S}_F(\mathbb{I}) \subset \mathsf{S}_{F_A}(\mathbb{I})$ を意味する．

逆に，任意の $Y \in \mathsf{S}_{F_A}(\mathbb{I})$ に対して，$X: \mathbb{I} \longrightarrow \mathsf{V}$ を $X(t) = A^{-1}Y(t)$ $(t \in \mathbb{I})$ によって定義すれば，前半の結果によって (A のかわりに A^{-1} を考える)，$X \in \mathsf{S}_{(F_A)_{A^{-1}}}(\mathbb{I}) = \mathsf{S}_F(\mathbb{I})$ $(\because (F_A)_{A^{-1}} = F)$ であり，$L(A)X = Y$ となる．したがって，(2.44) が成り立つ． ■

$\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})$ に対して，$X(t) := A^{-1}(Y(t))$ によって $X \in \mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})$ を定義すれば，$L(A)X = Y$ がわかる．したがって，$L(A)$ は全射である．

命題 2.15 は次のことを意味する：**力場 F のもとで運動 X が可能ならば，力場 F_A のもとで運動 $L(A)X$ が可能である．**ニュートン力学的運動に関するこの性質を，**運動の空間的並行性**と呼ぶ[*31]．

力場がある対称性あるいは不変性を持てば，運動についてもっと強い結果が得られる．

定義 2.16 $F_A = F$ のとき，F は A **不変**または A **対称**であるという．

命題 2.15 から，ただちに次の事実がしたがう：

定理 2.17 F が A 対称ならば，

$$L(A)\mathsf{S}_F(\mathbb{I}) = \mathsf{S}_F(\mathbb{I}). \tag{2.45}$$

すなわち，$\mathsf{S}_F(\mathbb{I})$ は $L(A)$ 対称である．

この定理は，力場の対称性と解空間の対称性が見事に呼応していることを示す．この場合には，**A 対称である力場 F のもとで，運動 X が可能ならば，同じ力場 F のもとで運動 $L(A)X$ が可能である．**この一般的事実をより具体的なコンテクストで見てみよう．

2.5 空間反転対称性

写像 $I_{\mathrm{sp}} : \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{V}$ を

$$I_{\mathrm{sp}}(x) := -x, \quad x \in \mathsf{V} \tag{2.46}$$

によって定義し，これを V 上の**空間反転** (space inversion) という．I_{sp} は線形であり

$$I_{\mathrm{sp}}^2 = I_{\mathsf{V}} \tag{2.47}$$

が成り立つ (I_{V} は V 上の恒等作用素)．したがって

$$\mathsf{G}_{\mathrm{sp}} := \{I_{\mathsf{V}}, I_{\mathrm{sp}}\} \tag{2.48}$$

は V 上の変換群であり，$\mathsf{G}_{\mathrm{sp}} \subset \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ である．この変換群を V 上の**空間反転群**と呼ぶ．

定義 2.18 写像 $F : \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{V}$ が I_{sp} 対称のとき，F は**空間反転対称**であるという．

[*31] この術語は，標準的なものではなく，筆者の発案によるものである．

F を $I_{\rm sp}$ 変換した場は

$$F_{I_{\rm sp}}(x) = -F(-x) \tag{2.49}$$

となる．したがって

$$F \text{ が空間反転対称} \Longleftrightarrow F(-x) = -F(x)\ (x \in \mathsf{V}). \tag{2.50}$$

例 2.19 次の型のベクトル場は空間反転対称である：

$$F(x) := \varPhi(\|x\|)x, \quad x \in \mathsf{V}.$$

ただし，$\varPhi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

定理 2.17 によって，次の事実が得られる．

定理 2.20 F が空間反転対称ならば，

$$L(I_{\rm sp})\mathsf{S}_F(\mathbb{I}) = \mathsf{S}_F(\mathbb{I}). \tag{2.51}$$

すなわち，$\mathsf{S}_F(\mathbb{I})$ は $L(I_{\rm sp})$ 対称である．

これは物理的には次のことを語る：**空間反転対称な力場** F **のもとで，運動** X **が可能ならば，同じ力場のもとで，それを空間反転した運動** $-X$ **も可能である．** これを**運動の空間反転対称性**という．

2.6 空間並進対称性

$\mathscr{T}_{\mathsf{V}} = \{T_a \mid a \in \mathsf{V}\}$ を V 上の並進群とする (例 1.46)．各 $a \in \mathsf{V}$ に対して写像 $S(a)$: $\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V}) \longrightarrow \mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})$ を

$$(S(a)X)(t) := T_a X(t) = X(t) + a, \quad t \in \mathbb{I}, X \in \mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})$$

と定義すれば $\{S(a) \mid a \in \mathsf{V}\}$ は $\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})$ 上の変換群であり，加法群としての V の $\mathscr{M}(\mathbb{I},\mathsf{V})$ 上での表現である．$S(a)X$ をベクトル a による写像 X の**並進**または**平行移動**と呼ぶ．X が運動を表すとき，$S(a)X$ も運動を表し，その軌道は，X の軌道をベクトル a だけ平行移動してできる集合である．

第1章 1.6 節の議論により，各 $a \in \mathsf{V}$ に対して $\mathscr{M}(\mathsf{V},\mathsf{V})$ 上の全単射な写像 $\hat{T}_a$ が

$$(\hat{T}_a G)(x) := G(T_a^{-1}(x)) = G(x - a), \quad G \in \mathscr{M}(\mathsf{V},\mathsf{V}) \tag{2.52}$$

によって定義される．$\hat{T}_a G$ をベクトル場 G のベクトル a による**並進**または**平行移動**と呼ぶ．

力場 $F : \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{V}$ に対して，そのベクトル a による並進を F_a と記す：

$$F_a := \hat{T}_a F. \tag{2.53}$$

定理 2.21 すべての $a \in \mathsf{V}$ に対して

$$S(a)\mathsf{S}_F(\mathbb{I}) = \mathsf{S}_{F_a}(\mathbb{I}). \tag{2.54}$$

証明 $X \in \mathsf{S}_F(\mathbb{I})$ としよう．このとき，$X_a = S(a)X$ とおけば，直接計算により

$$m\frac{d^2}{dt^2}X_a(t) = F_a(X_a(t))$$

がわかる．したがって，$X_a \in \mathsf{S}_{F_a}(\mathbb{I})$．ゆえに $S(a)\mathsf{S}_F(\mathbb{I}) \subset \mathsf{S}_{F_a}(\mathbb{I})$．逆に，$Y$ を $\mathsf{S}_{F_a}(\mathbb{I})$ の任意の元とすれば，同様にして $Y_{-a} \in \mathsf{S}_F(\mathbb{I})$ が示される．さらに，$S(a)Y_{-a} = Y$ が成り立つ．したがって $S(a)\mathsf{S}_F(\mathbb{I}) \supset \mathsf{S}_{F_a}(\mathbb{I})$．以上から，(2.54) がしたがう． ■

性質 (2.54) の物理的意味は次の通りである：**力場 F のもとでの運動 X が可能であるならば，運動 X をベクトル a だけ平行移動することにより得られる運動 $S(a)X$ は力場 F_a のもとで可能である．**この性質を**運動の空間的並進の並行性**と呼ぶ．

力場 F のある集合を導入する．

定義 2.22 ベクトル場 $F : \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{V}$ について，$F_a = F$ が成り立つとき,「F はベクトル a に関して並進対称である」あるいは「F はベクトル a による**並進対称性**を持つ」という．

$F_a = F$ は，すべての $x \in \mathsf{V}$ に対して，$F(x) = F(x+a)$ が成立することと同値である．ところで，このようなベクトル場は，**周期 a の周期的ベクトル場**と呼ばれる．したがって，ベクトル a に関して並進対称なベクトル場とは周期 a の周期的ベクトル場のことに他ならない．

定理 2.21 から次の結果が得られる．

定理 2.23 F がベクトル a による並進対称性を持てば

$$S(a)\mathsf{S}_F(\mathbb{I}) = \mathsf{S}_F(\mathbb{I}). \tag{2.55}$$

この定理は次のことを語る：**力場 F がベクトル a による並進対称性を持つとき，力場 F のもとで運動 X が可能ならば，同じ力場 F のもとで，それをベクトル a だけ平行移動した運動 $S(a)X$ も可能である．**この性質をベクトル a に関する，**運動の空間的並進対称性**という．

例 2.24 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,d}$ を V の任意の基底とし，$x\in$ V を $x=\sum_{i=1}^{d} x^i e_i$ と展開する．このとき $\boldsymbol{x}:=(x^1,\cdots,x^d)\in\mathbb{R}^d$ (x の座標表示) とし，$F(x)=\sum_{i=1}^{d}\widetilde{F}^i(\boldsymbol{x})e_i$ と表す．ベクトル $a=\sum_{i=1}^{d} a^i e_i$ に関して並進対称な F をつくるには，F の各成分 $\tilde{F}^i$ として周期 $\boldsymbol{a}=(a^1,\cdots,a^d)\in\mathbb{R}^d$ の周期関数をとればよい[*32]．たとえば，$a^i\neq 0$ $(i=1,\cdots,d)$ として，$\widetilde{F}^i(\boldsymbol{x})=\sin(2\pi x^1/a^1)\sin(2\pi x^2/a^2)\cdots\sin(2\pi x^d/a^d)$ $(i=1,\cdots,d)$ によって定義される関数 $\widetilde{F}^i$ は，周期 $\boldsymbol{a}$ の関数である．

注意 2.25 すべての $a\in$ V に対して，a による並進対称性を持つベクトル場は定ベクトル場 ($x\in$ V によらないベクトル場) しかない (確かめよ)．

2.7 広義回転対称性

O(V) を V 上の直交群とし (1.4 節を参照)，$A\in$ O(V) は $A(D)\subset D$ を満たすとする．ベクトル場 $F:D\longrightarrow$ V について $AF(A^{-1}(x))=F(x)$ $(x\in D)$ が成り立つとき，F は A について**広義回転対称**であるという．

定理 2.17 の応用として，次の結果が得られる．

定理 2.26 F がある $A\in$ O(V) に関して広義回転対称ならば

$$L(A)\mathsf{S}_F(\mathbb{I})=\mathsf{S}_F(\mathbb{I}). \tag{2.56}$$

この定理の物理的意味は次の通りである：A について**広義回転対称な力場** F **のもとで，運動** X **が可能ならば，同じ力場のもとで，それを広義回転した運動** AX **も可能である．これを運動の広義回転対称性**という．

例 2.27 例 2.19 の力場 F は広義回転対称である ($\because$ $B\in$ O(V) ならば $\|Bx\|^2=\|x\|^2$)．

2.8 伸張対称性

各 $\alpha>0$ に対して，写像 $D_\alpha:$ V $\longrightarrow$ V を

$$D_\alpha(x):=\alpha x,\quad x\in \mathsf{V} \tag{2.57}$$

[*32] 複素数値関数 $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{C}$ が周期 $\boldsymbol{a}$ の周期関数であるとは，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})=f(\boldsymbol{x})$ $(\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d)$ を満たすときをいう．

によって定義し，これを倍率 α の**伸張変換**または**スケール変換**と呼ぶ (例 1.49). これは，V のベクトルを向きを変えずに拡大または縮小する操作を記述する写像である ($\|D_\alpha(x)\|=\alpha\|x\|$ であるから，$\alpha>1$ ならば拡大，$0<\alpha<1$ ならば縮小である).

容易にわかるように，$D_\alpha\in \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ であり

$$D_1=I_{\mathsf{V}}, \quad D_\alpha D_\beta=D_{\alpha\beta}, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}_+=(0,\infty). \tag{2.58}$$

したがって，対応：$\mathbb{R}_+\ni\alpha\longmapsto D_\alpha$ は乗法群としての $\mathbb{R}_+$ の V 上での表現を与える.

さて，ニュートンの運動方程式の伸張変換に関する対称性を考察しよう．ここでは，簡単のため，時間区間が $\mathbb{R}$ 全体の場合だけを考える．$\varepsilon,\alpha\in\mathbb{R}_+$ とし，$X\in\mathscr{M}(\mathbb{R},\mathsf{V})$ に対して，$X_{\varepsilon,\alpha}\in\mathscr{M}(\mathbb{R},\mathsf{V})$ を

$$X_{\varepsilon,\alpha}(t):=\alpha X(t/\varepsilon)=D_\alpha X(t/\varepsilon), \quad t\in\mathbb{R} \tag{2.59}$$

によって定義する．V 値関数 $X_{\varepsilon,\alpha}$ を，X の**倍率** (ε,α) の**伸張変換**または**スケール変換**と呼ぶ．これは，ベクトル値関数 X に対して，空間的伸張変換だけでなく，時間に関しても倍率 $1/\varepsilon$ の伸張変換を施す変換である．写像 $\hat{D}_{\varepsilon,\alpha}:\mathscr{M}(\mathbb{R},\mathsf{V})\longrightarrow\mathscr{M}(\mathbb{R},\mathsf{V})$ を

$$\hat{D}_{\varepsilon,\alpha}X:=X_{\varepsilon,\alpha} \tag{2.60}$$

によって定義する．このとき，直接計算により，任意の $\varepsilon_j,\alpha_j\in\mathbb{R}_+$ $(j=1,2)$ に対して

$$\hat{D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2,\alpha_1\alpha_2}=\hat{D}_{\varepsilon_1,\alpha_1}\hat{D}_{\varepsilon_2,\alpha_2} \tag{2.61}$$

が成り立つことがわかる.

力場 $F:\mathsf{V}\longrightarrow\mathsf{V}$ に対して，ベクトル場 $F_{\varepsilon,\alpha}:\mathsf{V}\longrightarrow\mathsf{V}$ を

$$F_{\varepsilon,\alpha}(x):=\frac{\alpha}{\varepsilon^2}F(\alpha^{-1}x), \quad x\in\mathsf{V} \tag{2.62}$$

によって定義する.

簡単のため

$$\mathsf{S}_F:=\mathsf{S}_F(\mathbb{R},\mathsf{V})$$

とおく.

定理 2.28 すべての $\varepsilon,\alpha\in\mathbb{R}_+$ に対して，$\hat{D}_{\varepsilon,\alpha}\mathsf{S}_F=\mathsf{S}_{F_{\varepsilon,\alpha}}$.

証明 $X\in\mathsf{S}_F$ とする．合成関数の微分法により

$$m\frac{d^2X_{\varepsilon,\alpha}}{dt^2}=\frac{\alpha}{\varepsilon^2}mX''\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$
$$=\frac{\alpha}{\varepsilon^2}F\left(X\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)=F_{\varepsilon,\alpha}(X_{\varepsilon,\alpha}).$$

したがって，$X_{\varepsilon,\alpha}\in\mathsf{S}_{F_{\varepsilon,\alpha}}$. ゆえに $\hat{D}_{\varepsilon,\alpha}\mathsf{S}_F\subset\mathsf{S}_{F_{\varepsilon,\alpha}}$.

逆に $X\in\mathsf{S}_{F_{\varepsilon,\alpha}}$ とし $K=F_{\varepsilon,\alpha}$ とおく．このとき $Y:=\hat{D}_{\varepsilon^{-1},\alpha^{-1}}X=X_{\varepsilon^{-1},\alpha^{-1}}$ とおけば，前段の結果により (前段において，(ε,α) のかわりに $(\varepsilon^{-1},\alpha^{-1})$ を考える)，$Y\in\mathsf{S}_{K_{\varepsilon^{-1},\alpha^{-1}}}$. 一方，容易に確かめられるように，$K_{\varepsilon^{-1},\alpha^{-1}}=F$. したがって，$Y\in\mathsf{S}_F$. ゆえに $\hat{D}_{\varepsilon,\alpha}\mathsf{S}_F\supset\mathsf{S}_{F_{\varepsilon,\alpha}}$. ■

定理 2.28 は次のことを語る：**運動 X が力場 F のもとで可能ならば，力場 $F_{\varepsilon,\alpha}$ のもとで，伸張変換された運動 $X_{\varepsilon,\alpha}$ が可能である．**

力場が伸張変換に関して "よい" 性質を持つならば，定理 2.28 はさらに強められる．そのような力場のクラスを導入する．

定義 2.29 ベクトル場 $G:\mathsf{V}\longrightarrow\mathsf{V}$ について，実数 p があって，任意の $\alpha>0$ に対して $G(\alpha x)=\alpha^pG(x)$ $(\forall x\in\mathsf{V})$ が成り立つとき，G は **p 次の伸張対称性**を持つという．

定理 2.30 力場 F は p 次の伸張対称性を持つとする．このとき

$$\hat{D}_{\varepsilon,\alpha}\mathsf{S}_F=\mathsf{S}_{\varepsilon^{-2}\alpha^{1-p}F}. \tag{2.63}$$

証明 仮定のもとでは，$F_{\varepsilon,\alpha}=\varepsilon^{-2}\alpha^{1-p}F$ が成り立つことによる． ■

定理 2.30 において，時間のスケール ε を $\varepsilon=\alpha^{(1-p)/2}$ となるようにとれば，次の重要な結果が得られる：

定理 2.31 力場 F が p 次の伸張対称性を持つとし

$$\varepsilon_p(\alpha):=\alpha^{(1-p)/2} \tag{2.64}$$

とする．このとき

$$\hat{D}_{\varepsilon_p(\alpha),\alpha}\mathsf{S}_F=\mathsf{S}_F. \tag{2.65}$$

この定理は次のことを語る：**力場 F が p 次の伸張対称性を持つとき，力場 F のもとで運動 X が可能ならば，同じ力場 F のもとで，運動 $X_{\varepsilon_p(\alpha),\alpha}$ が可能である．**

定理 2.31 が有する物理的帰結の 1 つを考察しよう．まず，運動のあるクラスを

導入する．運動 $X:\mathbb{R}\longrightarrow \mathsf{V}$ が**周期的**であるとは，ある $T>0$ が存在して，$X(t+T)=X(t)$ $(\forall t\in\mathbb{R})$ が成り立つ場合をいう．T を運動 X の**周期**と呼ぶ．運動 X の周期のうち最小のものをその**基本周期**という．

力場 F が p 次の伸張対称性を持つ場合を考え，F のもとで周期的な運動 $X\in\mathsf{S}_F$ が存在するとし，その基本周期を T とする．このとき $X_{\varepsilon_p(\alpha),\alpha}\in\mathsf{S}_F$ (定理 2.31) も周期的であり，その基本周期は $T_\alpha:=\varepsilon_p(\alpha)T=\alpha^{(1-p)/2}T$ である．これらの事実を用いると

$$\frac{T^2}{\|X(0)\|^{1-p}}=\frac{T_\alpha^2}{\|X_{\varepsilon_p(\alpha),\alpha}(0)\|^{1-p}} \tag{2.66}$$

が成り立つことが容易にわかる．すなわち，**2 つの運動** $X, X_{\varepsilon_p(\alpha),\alpha}$ **において，基本周期の 2 乗と初期位置のノルムの** $(1-p)$ **乗の比は一定である．**

例 2.32 上に導いた事実が惑星運動の文脈では何を意味するかを見よう．いま，太陽が $\mathbb{R}^3$ の原点に固定され，そのまわりを質量 $m>0$ の惑星が運動を行うとする．太陽の質量を M とするとき，位置 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ にある惑星と太陽との間には，**万有引力** $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}):=-GM m\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|^3$ ($G>0$ は万有引力定数) が働く．したがって，惑星の運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{X}(t)}{dt^2}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(t)) \tag{2.67}$$

という形をとる．ただし，$\boldsymbol{X}(t)\in\mathbb{R}^3$ は時刻 $t\in\mathbb{R}$ での惑星の位置である．容易にわかるように，任意の $\alpha>0$ に対して $\boldsymbol{F}(\alpha\boldsymbol{x})=\alpha^{-2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$．したがって，この $\boldsymbol{F}$ は，次数が $p=-2$ の伸張対称性を持つ．

さて，惑星は，太陽を 1 つの焦点とする楕円軌道を描くとし (**ケプラーの第 1 法則**)，その基本周期を $T>0$, 楕円軌道の長径を $a>0$ とする．初期条件を $|\boldsymbol{X}(0)|=a$ となるようにとれば，上述の事実の応用により，T^2/a^3 が惑星によらず一定となる惑星運動のクラスがあることがわかる．ところで，周期の 2 乗と長径の 3 乗の比が惑星によらず (近似的に) 一定であるという事実は，**ケプラーの第 3 法則**として知られている事柄である．こうして，ケプラーの第 1 法則を前提とすれば，これと運動方程式の伸張対称性を組合せることにより，あるクラスの惑星運動に対して，ケプラーの第 3 法則を導くことができる*[33]．ここで重要な点は，運動方程式 (2.67) の具体的な解を求めなくても，その解のある側面に関する知見が得られ

---

*[33] ケプラーの第 3 法則は，厳密には，惑星の質量が太陽の質量に比べて "非常に小さい" 場合にのみ成り立つ近似的な経験的法則である．

たということである．ちなみに，運動方程式 (2.67) は陽に解くことができ，それによって，ケプラーの法則として知られる一連の事実がより厳密かつ詳細な形で認識されるのみならず，惑星が楕円軌道以外の軌道もとりうることが示される[*34]．

2.9 ガリレイ変換とガリレイ対称性

これまでは，ニュートンの運動方程式の対称性に関わる変換 (時間並進，時間反転，空間反転，空間並進，回転など) を個別的に見てきた．この節では，時間並進，空間反転，空間並進，回転を統一する時空上の変換の 1 つのクラスを導入し，このクラスに属する変換が定める対称性について論じる．

2.9.1 ガリレイ変換とガリレイ群

定義 2.33 V_N は (2.1) で与えられるものとする．次の性質 (i)〜(iii) を持つ V_N 上の変換 g (全単射な写像) を V_N 上の**ガリレイ変換**と呼ぶ：

(i) (**アファイン性**) ベクトル $a_g \in V_\mathrm{N}$ と V_N 上の同型写像 L_g (i.e., $L_g \in \mathrm{GL}(V_\mathrm{N})$) が存在して

$$g(X) = a_g + L_g(X), \quad \forall X \in V_\mathrm{N} \tag{2.68}$$

が成り立つ．

(ii) (**同時事象間の距離の保存**) 任意の $t \in \mathbb{R}$ と任意の $A, B \in \mathscr{E}_t$ に対してある $t' \in \mathbb{R}$ があって，$g(A), g(B) \in \mathscr{E}_{t'}$ であり，$\rho(g(A), g(B)) = \rho(A, B)$．

(iii) (**時間間隔の保存**) 任意の $A, B \in V_\mathrm{N}$ に対して $\delta_\mathrm{time}(g(A), g(B)) = \delta_\mathrm{time}(A, B)$．

注意 2.34 (i) にいう a_g と L_g は g から一意的に決まる．

証明 仮に，$b \in V_\mathrm{N}$ と V_N 上の同型な線形写像 K があって，$g(X) = b + K(X)$ ($\forall X \in V_\mathrm{N}$) が成り立つとしよう．特に，$X = 0$ とすれば $K(0) = 0, L_g(0) = 0$ であるから，$a_g = b$．これは $L_g(X) = K(X)$ ($\forall X \in V_\mathrm{N}$) を導く．したがって，$L_g = K$． ■

ガリレイ変換とは，言葉で述べるならば，時空上のアファイン変換で同時事象間の距離と時間間隔を保存する変換，すなわち，時空のガリレイ構造を保存するアファイン変換のことである．

[*34] くわしくは，拙著『物理現象の数学的諸原理』(共立出版，2003) の 4.6 節を参照．

注意 2.35 物理学の多くの文献では，ガリレイ変換なる名称は，“慣性座標系” の間のある種の座標変換を表す言葉として使用される．だが，本書での使用法は，これとは異なるものであることに注意されたい．上の定義から明らかなように，**本書の意味でのガリレイ変換は，時空上の写像であって，座標変換のことではない**．座標変換というのは，同一の “もの” を別の角度から眺めるだけであり，相対的，便宜的なものにすぎない．

例 2.36 ベクトル $v \in \mathsf{V}$ に対して，写像 $g_v : V_{\mathrm{N}} \longrightarrow V_{\mathrm{N}}$ を

$$g_v(t,x) := (t, x+vt), \quad (t,x) \in V_{\mathrm{N}}$$

によって定義する．g_v はガリレイ変換である (問題 5)．このガリレイ変換を**速度** v **の等速度運動**という．この命名は，$X_v(t) := x+vt$ とおけば，曲線 $X_v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathsf{V}$ が，一定速度 v の運動を表すことによる ($\dot{X}_v(t) = v$ (一定) に注意)．

例 2.37 実数 $s \in \mathbb{R}$ と $y \in \mathsf{V}$ に対して，写像 $g_{s,y} : V_{\mathrm{N}} \longrightarrow V_{\mathrm{N}}$ を

$$g_{s,y}(t,x) := (t+s, x+y), \quad (t,x) \in V_{\mathrm{N}}$$

によって定義する．$g_{s,y}$ はガリレイ変換である (問題 6)．これは時空の各点をベクトル (s,y) だけいっせいにずらす変換であり，したがって，時間並進と空間並進を統一する写像である．

例 2.38 $G : \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{V}$ を広義回転とする (i.e., $G \in \mathrm{O}(\mathsf{V})$)．このとき

$$g_G(t,x) := (t, Gx), \quad (t,x) \in V_{\mathrm{N}}$$

によって定義される写像 $g_G : V_{\mathrm{N}} \longrightarrow V_{\mathrm{N}}$ はガリレイ変換である (問題 7)．これは，空間上の広義回転を時空上のガリレイ変換として捉えたものである．

ガリレイ変換の一般的構造を調べるために，次の事実に注目する：

補題 2.39 任意の $L \in \mathsf{L}(V_{\mathrm{N}})$ (V_{N} 上の線形作用素の全体) に対して，$\alpha \in \mathbb{R}, v \in \mathsf{V}$, $\ell \in \mathsf{V}^*$ (V の双対空間：付録 B の B.2.8 項を参照), $T \in \mathsf{L}(\mathsf{V})$ が存在して

$$L(t,x) = (\alpha t + \ell(x), vt + T(x)), \quad (t,x) \in V_{\mathrm{N}} \tag{2.69}$$

が成り立つ．

証明 L の線形性により，$L(t,x) = tL(1,0) + L(0,x)$ と書ける．$L(1,0) \in V_{\mathrm{N}}$ であるから，$L(1,0) = (\alpha, v)$ と表される．ただし，$\alpha \in \mathbb{R}$ は定数，$v \in \mathsf{V}$ は定ベクトルである．同様に，$L(0,x) = (\ell(x), T(x))$ と書ける ($\ell(x) \in \mathbb{R}, T(x) \in \mathsf{V}$)．$L$ の線形性

により，対応 $\ell:\mathsf{V}\ni x\longmapsto \ell(x)\in\mathbb{R}$; $T:\mathsf{V}\ni x\longmapsto T(x)\in\mathsf{V}$ はいずれも線形である．したがって，$\ell\in\mathsf{V}^*$ (V の双対空間) であり，以上をまとめれば，(2.69) が得られる． ■

注意 2.40 双対空間 V^* の元に関する表現定理 (付録 C の C.6 節を参照) を使えば，上の ℓ は，あるベクトル $x_\ell\in\mathsf{V}$ を用いて，$\ell(x)=\langle x_\ell,x\rangle_{\mathsf{V}}$ という形に表される．

次の定理はガリレイ変換の構造を明らかにする：

定理 2.41 任意のガリレイ変換 g に対して，$v\in\mathsf{V},(s,y)\in V_{\mathrm{N}},G\in\mathrm{O}(\mathsf{V})$ がそれぞれ，唯ひとつ存在し

$$g=g_v g_{s,y} g_G \tag{2.70}$$

という形に表される．

証明 g をガリレイ変換とする．(2.68) と補題 2.39 によって ($L=L_g$ として応用)，$(t',x')=g(t,x)$ とおけば

$$t'=\alpha t+\ell(x)+s,$$

$$x'=vt+G(x)+u$$

と表される．ただし，$a_g=(s,u)$ とし，$\ell\in V^*,\alpha\in\mathbb{R},G\in\mathsf{L}(\mathsf{V})$ である．g の時間間隔保存性により，$(t'',x'')=g(r,z)$ $((r,z)\in V_{\mathrm{N}})$ とすれば $t'-t''=t-r$ でなければならない．上式により $t'-t''=\alpha(t-r)+\ell(x-z)$ であるから，$t-r=\alpha(t-r)+\ell(x-z)$. そこで，特に $t=r$ の場合を考えると，$\ell(x-z)=0$. したがって，$t-r=\alpha(t-r)$ であるので，$\alpha=1$. ゆえに，$t'=t+s$. g は同時事象 $(t,x),(t,0)$ $(\forall x\in\mathsf{V})$ の距離を保存するから，$\|G(x)\|_{\mathsf{V}}=\|x\|_{\mathsf{V}}$ が導かれる．したがって，$G\in\mathrm{O}(\mathsf{V})$. 他方，$(g_v g_{s,y} g_G)(t,x)=(t+s,v(t+s)+y+G(x))\cdots(*)$. そこで，$y:=u-vs$ とおけば，(2.70) が成り立つことがわかる．

表示 (2.70) の一意性を示すために，別に $g=g_w g_{r,z} g_H$ と表されたとしよう ($w,z\in\mathsf{V},H\in\mathrm{O}(\mathsf{V})$)．したがって，$g_w g_{r,z} g_H=g_v g_{s,y} g_G$. このとき $(*)$ により，すべての $t\in\mathbb{R},x\in\mathsf{V}$ に対して $(t+s,v(t+s)+y+G(x))=(t+r,w(t+r)+z+H(x))$ が成り立つ．これから，$s=r,v=w,y=z,G=H$ が導かれる． ■

ガリレイ変換の全体

$$\mathrm{G}(V_{\mathrm{N}}):=\{g\,|\,g\text{ は }V_{\mathrm{N}}\text{ 上のガリレイ変換}\} \tag{2.71}$$

を考えよう．

定理 2.42 $\mathrm{G}(V_{\mathrm{N}})$ は V_{N} 上の変換群である．

証明 $g,h\in\mathrm{G}(V_{\mathrm{N}})$ とすれば，例 1.52 により (そこでの V が V_{N} である場合へ応用)，gh は V_{N} 上のアファイン変換である．任意の $A=(t,x),B=(t,y)\in V_{\mathrm{N}}$ に対して，$h(A),h(B)\in\mathscr{E}_{t'}$ $(t'\in\mathbb{R})$ であるから，$(gh)(A),(gh)(B)\in\mathscr{E}_{t''}$ $(t''\in\mathbb{R})$．さらに

$$\rho((gh)(A),(gh)(B))=\rho(g(h(A)),g(h(B)))=\rho(h(A),h(B))=\rho(A,B).$$

したがって，gh は同時事象間の距離を保存する．gh が時間間隔を保存することも容易にわかる．ゆえに，$gh\in\mathrm{G}(V_{\mathrm{N}})$.

(2.70) によって，$g^{-1}=g_G^{-1}g_{s,y}^{-1}g_v^{-1}$. 容易にわかるように

$$g_v^{-1}=g_{-v},\quad g_{s,y}^{-1}=g_{-s,-y},\quad g_G^{-1}=g_{G^{-1}}.$$

したがって

$$g^{-1}=g_{G^{-1}}g_{-s,-y}g_{-v}.$$

一方，$g_{-v},g_{-s,-y},g_{G^{-1}}$ のいずれも，同時事象を同時事象に写し，いずれもその同時事象の距離を保存するので，g^{-1} もそうである．したがって，$g^{-1}\in\mathrm{G}(V_{\mathrm{N}})$.

■

変換群 $\mathrm{G}(V_{\mathrm{N}})$ を**ガリレイ群**と呼ぶ.

2.9.2 ニュートンの運動方程式のガリレイ対称性

(2.70) によって，任意のガリレイ変換 $g\in\mathrm{G}(V_{\mathrm{N}})$ の時空点 $(t,x)\in V_{\mathrm{N}}$ への作用は

$$g(t,x)=(t+s,Gx+y+v(t+s)) \tag{2.72}$$

という形で与えられる．ただし，$s\in\mathbb{R},G\in\mathrm{O}(\mathsf{V}),v,y\in\mathsf{V}$ はそれぞれ，g ごとに一意的に決まる実数，広義回転，ベクトルである．したがって，任意の運動 $X:\mathbb{R}\longrightarrow\mathsf{V}$ に対して

$$g(t,X(t))=(t+s,GX(t)+y+v(t+s)). \tag{2.73}$$

そこで

$$t_g:=t+s,\quad X_g(\tau):=GX(\tau-s)+y+v\tau,\quad \tau\in\mathbb{R} \tag{2.74}$$

とおけば

$$g(t,X(t))=(t_g,X_g(t_g)). \tag{2.75}$$

写像 $X_g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathsf{V}$ を X の g による**ガリレイ変換**と呼び

$$\hat{g}(X):=X_g \tag{2.76}$$

とおけば，対応 $\hat{g}:X\longrightarrow X_g$ は運動の集合上の写像を定める．

定義 2.43 $\mathsf{S}_F(D)$ を力場 F に対するニュートンの運動方程式 (2.9) の解空間としよう ((2.22))．すべての $g\in \mathrm{G}(V_{\mathrm{N}})$ に対して $\hat{g}(\mathsf{S}_F(D))=\mathsf{S}_F(D)$ が成り立つとき，ニュートンの運動方程式 (2.9) は**ガリレイ対称性**を持つという[*35]．

注意 2.44 同様に，ガリレイ群の任意の部分群に対してもニュートンの運動方程式の対称性を定義できる．

ガリレイ群は，時間並進，空間並進，広義回転を含むので，"比較的大きな" 群である (もちろん，無限群)．したがって，ニュートンの運動方程式 (2.9) に関するガリレイ対称性は，力場 F にかなり強い制限を課すことになることが予想される．実際，次の定理が成り立つ：

定理 2.45 ニュートンの運動方程式 (2.9) がガリレイ対称性を持つための必要十分条件は $F=0$ である．

証明 (必要性) 任意の $g\in \mathrm{G}(V_{\mathrm{N}})$ と $X\in\mathsf{S}_F(D)$ に対して，X_g がニュートンの運動の方程式 (2.9) を満たすとしよう．すなわち，$mX_g''(t)=F(X_g(t))$．(2.74) の第2式により，$X_g(t)=GX(t-s)+y+vt$ であるから $mX_g''(t)=mGX''(t-s)=GF(X(t-s))\cdots(*)$．したがって，$F(GX(t-s)+y+vt)=GF(X(t-s))$．そこで，$G=I, t=s, v=0$ の場合を考えると，$F(X(0)+y)=F(X(0))$．$y\in\mathsf{V}$ は任意であるから，これは，すべての $x\in\mathsf{V}$ に対して $F(x)=F_0$ (V の定ベクトル) を意味する．すると $GF_0=F_0$ ($\forall G\in \mathrm{O}(\mathsf{V})$)．特に，$G=-I$ とすれば $2F_0=0$ となるので，$F_0=0$．したがって，$F=0$．

(十分性) $F=0$ とする．したがって，ニュートンの運動方程式 (2.9) は $mX''(t)=0$ という形をとる．これと $(*)$ の第1の等号により，$mX_g''(t)=0$．したがって，$X_g\in\mathsf{S}_0(D)$． ■

定理 2.45 は，ニュートンの運動方程式 (2.9) にガリレイ対称性を持つことを要求すると自由運動 (力が作用しない運動) しか許されないことを語る．それではつ

[*35] これは，平たくいえば，X がニュートンの運動方程式 (2.9) の解ならば，すべての $g\in \mathrm{G}(V_{\mathrm{N}})$ に対して X_g もそうである，ということである．

まらないではないか，と思われるかもしれない．だが，そうではないのである．じつは，ニュートンの運動方程式 (2.9) は，たとえば，2 体系 (2 個の質点からなる系) において，その重心に対する質点の相対的運動に対する方程式と見ることができる[*36]．したがって，この場合，それは，1 つの部分系だけを見ていることになるのである．ゆえに，$F \neq 0$ の場合にガリレイ対称性が成立しなくても不自然というわけではない．実際，多体系を考え，質点間の相互作用として内力 — 質点間の距離と質点を結ぶ方向のみに依存する力 — だけを考えるならば，ガリレイ対称性は成立するのである．

第 2 章の演習問題

V は d 次元ユークリッドベクトル空間とする．

1. $V_{\mathrm{C}}(x) := 1/\|x\|$ とするとき，$(\mathrm{grad}\, V_{\mathrm{C}})(x) = -x/\|x\|^3$ を示せ．

2. $\{e_i\}_{i=1}^d$ を V の任意の基底とし，$x \in \mathsf{V}$ を $x = \sum_{i=1}^d x^i e_i$ と展開する ($x^i \in \mathbb{R}$)．偏微分作用素 ∂_j を

$$(\partial_j f)(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x^j}$$

によって定義する (f は V 上の微分可能な関数)．$g_{ij} := \langle e_i, e_j \rangle$ $(i, j = 1, \cdots, d)$ とおき，行列 $g = (g_{ij})$ の逆行列 g^{-1} の (i, j) 成分を g^{ij} と記す：

$$g^{ij} := (g^{-1})^{ij}.$$

偏微分作用素 Δ を

$$\Delta := \sum_{i,j=1}^d g^{ij} \partial_i \partial_j \tag{2.77}$$

によって定義する．このとき Δ は基底の取り方によらないことを示せ．すなわち，$\{e'_i\}_{i=1}^d$ を V の別の基底として $x = \sum_{i=1}^d x^{i\prime} e'_i$ と展開し，$g'_{ij} := \langle e'_i, e'_j \rangle$, $\partial'_i f(x) := \partial f(x)/\partial x^{i\prime}$ とするとき

$$\sum_{i,j=1}^d g^{ij} \partial_i \partial_j = \sum_{i,j=1}^d g^{ij\prime} \partial'_i \partial'_j$$

[*36] この点についてくわしいことは，拙著『物理現象の数学的諸原理』(共立出版，2003) の 4.6 節を参照．

を示せ.

注 基底の取り方によらない絶対的な対象として定まる (V 上の 2 回連続微分可能な関数に働く) 偏微分作用素 Δ を V 上の**ラプラシアン**または**ラプラス作用素**という．特に，$\{e_i\}_{i=1}^{d}$ が正規直交基底ならば $g_{ij}=\delta_{ij}$ であるから (したがって，$g^{ij}=\delta_{ij}$)

$$\Delta=\sum_{i=1}^{d}\partial_j^2$$

である．多くの読者は，$\mathsf{V}=\mathbb{R}^d$ の場合において，この偏微分作用素にはなじみがあることであろう．だが，上述のことから明らかになったように，こちらの形は，絶対的な対象 Δ の正規直交基底による (相対的な) 表示だということである．

V の開集合 D 上の 2 回連続微分可能な関数 f に関する偏微分方程式

$$\Delta f=0$$

を**ラプラス方程式**といい，この解を D 上の**調和関数**と呼ぶ．

3. 実数 α に対して，$\mathsf{V}\setminus\{0\}$ 上のスカラー場 ϕ_α を $\phi_\alpha(x):=1/\|x\|^\alpha$ によって定義する．このとき，ϕ_α が $\mathsf{V}\setminus\{0\}$ 上の調和関数であるための必要十分条件は，$d=\alpha+2$ であることを示せ．

注 この問題において $\alpha=1$ の場合を考えると次のことがわかる．つまり，**空間次元 d が 3 であることは，クーロン型ポテンシャルが調和関数であるための必要十分条件**なのである．これは，クーロン型ポテンシャル — それは，物質に働く根源的な力である万有引力，電気的力，磁気力を生み出す — という対象を用いての空間次元が 3 であることの特徴づけを与える．この場合，自然哲学の観点から，次に問うべきは，関数の調和性 (関数が調和関数であるということ) がいかなる "意味" を持つか，ということである．この問いに対する解答を得るためには，さらに高次の観点から考察する必要がある．だが，それは本書の範囲を超えるので，この問題について，これ以上論及することは控える．

4. ポテンシャル V によって記述される力場 $F=-\mathrm{grad}\,V$ のもとでの運動 X を考える (X はニュートンの運動方程式の解)．定数 $a>0, b>0, p>0$ があって

$$V(x)\geq a\|x\|^p-b, \quad x\in\mathsf{V} \tag{$*$}$$

が成り立つとする．このとき，$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|X(t)\|<\infty\cdots(**)$ であることを示せ．

注 この問題の結果は，条件 $(*)$ にしたがうポテンシャル V のもとでの運動は，必ず有界領域のうちに収まることを示す．$(*)$ は $\lim_{\|x\|\to\infty}V(x)=+\infty$ を導く．これ

は，物理的には，無限遠に近づけば近づくほどポテンシャルによる“障壁”がいくらでも高くなること，したがって，質点が無限遠に行くことが阻まれることを意味する．この事態の厳密な表現が (∗∗) である．

5. 例 2.36 における写像 g_v はガリレイ変換であることを示せ．

6. 例 2.37 における写像 $g_{s,y}$ はガリレイ変換であることを示せ．

7. 例 2.38 における写像 g_G はガリレイ変換であることを示せ．

8. (**抽象的ガリレイ時空**) $\mathscr{A}$ を $(d+1)$ 次元アファイン空間とし，その基準ベクトル空間 V は $(d+1)$ 次元のユークリッドベクトル空間であるとする．$\mathscr{A}$ の点を**世界点**または**事象**と呼ぶ．

(i) 任意の $T\in V^*\setminus\{0\}$ を**時間間隔**と呼ぶ (定義)．$\dim\ker T=d$ を示せ．

(ii) 2 つの事象 $P,Q\in\mathscr{A}$ は，$P-Q\in\ker T$ であるとき，**同時に起こる**という (定義)．事象 P と同時に起こる事象 — **同時事象**と呼ぶ — の全体を $\mathscr{B}_P$ とする．このとき，$\mathscr{B}_P$ は $\ker T$ を基準ベクトル空間とする d 次元の部分アファイン空間であることを示せ．

(iii) $Q,R\in\mathscr{B}_P$ に対して

$$\rho(Q,R):=\sqrt{\langle Q-R,Q-R\rangle_V}$$

によって定義される非負の実数を**同時事象 Q,R の間の空間的距離**と呼ぶ．これは $\mathscr{B}_P$ における平行移動に関して不変であることを示せ．

(iv) $\mathscr{A}$ 上のアファイン変換 G は次の性質を満たすとき，$\mathscr{A}$ 上の**ガリレイ変換**と呼ばれる：

(G.1) (**時間間隔の保存**)　$T(G(P)-G(Q))=T(P-Q)\ (\forall P,Q\in\mathscr{A})$.

(G.2) (**同時事象間の距離の保存**)　任意の同時事象の組 (P,Q) に対して $G(P)$ と $G(Q)$ は同時事象であり，$\rho(G(P),G(Q))=\rho(P,Q)$.

ガリレイ変換の全体を $\mathscr{G}$ とするとき，$\mathscr{G}$ は群をなすことを示せ．この群を**ガリレイ群**と呼ぶ．

(v) $\mathscr{A}$ の中に任意に 1 点 O を定め，これを始点とする位置ベクトルの全体を V と同一視し，$\mathscr{A}$ の点を V の点として表す．各点 $u\in V$ の時刻を $T(u)\in\mathbb{R}$ として定義し，時刻 $t\in\mathbb{R}$ における同時事象の空間を

$$E_t:=\{u\in V\,|\,T(u)=t\}$$

によって定義する．任意の $P\in\mathscr{A}$ に対して，$t_P:=T(P-O)$ とおく (これは，基

準点 O に相対的な枠での事象 P の時刻を表す)．このとき，$\mathscr{B}_P$ と E_{t_P} はアファイン同型であることを示せ.

(vi) $t \neq s$ ならば，$E_t \cap E_s = \varnothing$ を示せ.

(vii) $V = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} E_t$ を示せ.

(viii) V_d を任意の d 次元ユークリッドベクトル空間とする．このとき，ベクトル空間としての同型写像 $S : V \longrightarrow \mathbb{R} \oplus V_d$ で $S(\ker T) = V_d, S((\ker T)^{\perp}) = \mathbb{R}$, $S(E_t) = \{(x,t) \,|\, x \in V_d\}$ を満たすものが存在することを示せ.

注 この問題は，抽象的なアファイン空間から抽象的なガリレイ構造が “分節” される構造を示すとともに，それがより具象的なガリレイ時空 $\mathbb{R} \oplus V_d$ へと “下降” してくる様を観照するためのものである.

第3章

解析力学

3.1　ニュートンの運動方程式の書き換え

第2章で考察したニュートンの運動方程式は，力学的現象に関わる経験的な事実と数学的概念の結合から導かれた．そこで次に，いったん，通常の経験的世界を離れて，純理念的にニュートンの運動方程式の“由来”を問うてみる．すなわち，ニュートンの運動方程式が，純数学的に導かれる何らかの普遍的構造があるかどうかを調べるのである．この仕事を行うための第1歩は，ニュートンの運動方程式の形に注目して，これを別の形に書き換えてみることである．

簡単のため，力場 F がポテンシャル V を持つ場合，すなわち

$$F = -\mathrm{grad}\,V \tag{3.1}$$

が成り立つ場合を考える．したがって，この場合のニュートンの運動方程式は

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2} = -(\mathrm{grad}\,V)(X(t)) \tag{3.2}$$

という形をとる (以下，特に断らない限り，時刻 t の属する集合は $\mathbb{R}$ の区間 $\mathbb{I}$ とする)．さらに，議論を見やすくするために，V の正規直交基底 $E=\{e_1,\cdots,e_d\}$ を任意にとり，この基底に関してニュートンの運動方程式の空間的座標形式を用いる．この場合，$V(x)=V\left(\sum_{i=1}^{d} x^i e_i\right)$ を x^i $(i=1,\cdots,d)$ の関数とみることができる．この見方において，V の x^i に関する偏導関数を $\partial_i V$ または $\dfrac{\partial V}{\partial x^i}$ という記号で表す[*1]．勾配ベクトルの成分表示の一般論により (付録Dを参照)，$(\mathrm{grad}\,V)(x)=$

[*1] この記法は，E が正規直交基底でない基底である場合や他の関数の場合にも適用される．

$\sum_{i=1}^{d}\partial_i V(x)e_i$ であるから，ニュートンの運動方程式 (3.2) は

$$m\frac{d}{dt}v^i(t)+\partial_i V(X(t))=0,\quad i=1,\cdots,d \tag{3.3}$$

と書かれる $(X(t)=\sum_{i=1}^{d}X^i(t)e_i)$．ただし

$$v^i(t):=\frac{dX^i(t)}{dt}=\dot{X}^i(t) \tag{3.4}$$

とおいた．したがって

$$v(t)=\sum_{i=1}^{d}\dot{X}^i(t)e_i. \tag{3.5}$$

さて，任意の $v=\sum_{i=1}^{d}v^i e_i\in \mathsf{V}$ に対して，そのノルム $\|v\|_{\mathsf{V}}=\sqrt{\langle v,v\rangle_{\mathsf{V}}}$ の 2 乗は

$$\|v\|_{\mathsf{V}}^2=\sum_{i=1}^{d}(v^i)^2 \tag{3.6}$$

で与えられる ($\because \{e_i\}_i$ は正規直交基底)．したがって

$$mv^i(t)=\frac{\partial}{\partial v^i}\frac{m\|v\|_{\mathsf{V}}^2}{2}\bigg|_{v=v(t)}$$

と表される[*2]．v を x とは独立な変数 (ベクトル変数) と考えると

$$\frac{\partial}{\partial v^i}V(x)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{m\|v\|_{\mathsf{V}}^2}{2}=0.$$

そこで，相空間上の実数値関数 $L_V:D\times\mathsf{V}\longrightarrow\mathbb{R}$ を

$$L_V(x,v):=\frac{m\|v\|_{\mathsf{V}}^2}{2}-V(x) \tag{3.7}$$

によって導入し

$$\frac{\partial L_V(X(t),\dot{X}(t))}{\partial \dot{X}^i(t)}:=\frac{\partial L_V(x,v)}{\partial v^i}\bigg|_{x=X(t),v=\dot{X}(t)}, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial L_V(X(t),\dot{X}(t))}{\partial X^i(t)}:=\frac{\partial L_V(x,v)}{\partial x^i}\bigg|_{x=X(t),v=\dot{X}(t)} \tag{3.9}$$

と規約すれば，ニュートンの運動方程式 (3.3) は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_V(X(t),\dot{X}(t))}{\partial \dot{X}^i(t)}-\frac{\partial L_V(X(t),\dot{X}(t))}{\partial X^i(t)}=0,\quad i=1,\cdots,d \tag{3.10}$$

[*2] 集合 X から集合 Y への写像 $f:\mathsf{X}\longrightarrow\mathsf{Y}$ に対して，$f(x)\Big|_{x=u}:=f(u)$ $(u\in\mathsf{X})$ という記法も用いる．

と書きなおせる．この方程式は，ニュートンの運動方程式がどのようにして得られるかを語る．すなわち，ポテンシャル V が与えられると関数 L_V が (3.7) によって決まり，それから，(3.10) によって微分方程式が定まり，この微分方程式がまさにニュートンの運動方程式であるという構造である．関数 L_V をポテンシャル V から定まる**ラグランジュ関数**といい，微分方程式 (3.10) を L_V から定まる (あるいは L_V に関する) **オイラー–ラグランンジュ方程式**または単に**ラグランジュ方程式**と呼ぶ．

3.2　ラグランジュ形式

前節において見出された構造は，ある普遍的な構造の特殊な現れと見ることができる．というのは，方程式 (3.10) の構造自体は次のように一般化することが可能だからである．

相空間上の連続微分可能な実数値関数 $L: D\times \mathsf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとしよう．この範疇の関数を**ラグランジュ関数**といい，D と L の組 (D,L) を**ラグランジュ系**と呼ぶ．このとき，微分方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(X(t),\dot{X}(t))}{\partial \dot{X}^i(t)} - \frac{\partial L(X(t),\dot{X}(t))}{\partial X^i(t)} = 0, \quad i=1,\cdots,d \tag{3.11}$$

を考えることができる．これを L から定まる (あるいは L に関する) **オイラー–ラグランジュ方程式**または単に**ラグランジュ方程式**と呼ぶ．この構造は多体系の場合にも拡張することができ，正規直交基底による座標表示だけでなく，しかるべき変換則にしたがう任意の座標系においても定式化が可能である．ラグランジュ関数を用いて，(3.11) の型の運動方程式を定義する形式を**ラグランジュ形式**という[*3]．

より高次の数学的理念を探求する精神からは，ラグランジュ方程式 (3.11) とはそもそも "何" なのかと問うことは自然である．これに対する答えは，**変分原理**と呼ばれる，ある普遍的な数学的原理によって与えられる．だが，本書では，残念ながら，紙幅の都合上，この原理について述べる余裕がない[*4]．

[*3] この形式は，特に，拘束系 (たとえば，球面に束縛されている質点系) における運動を扱うのに威力を発揮する．

[*4] V.I. アーノルド『古典力学の数学的方法』(岩波書店，1980)，保江邦夫『数理物理学方法序説 6 (解析力学)』(日本評論社，2000)；『数理物理学方法序説 5 (変分学)』(日本評論社，2001) や拙著『物理現象の数学的諸原理』(共立出版，2003) の第 5 章，5.3 を参照．

3.3 対称性と保存則 — ネーターの定理

この節の目的は，ラグランジュ形式において，ラグランジュ関数のある種の対称性が物理量の保存則を導くことを示すことである．

V を d 次元ユークリッドベクトル空間とし，D を V の開集合とする．$L: D\times \mathsf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ をラグランジュ関数とする．関数 $f: D\times\mathsf{V}\longrightarrow\mathbb{R}$ について，L から定まるラグランジュ方程式 (3.11) の任意の解 $X(t)$ に対して，$f(X(t),\dot{X}(t))$ が t によらず一定であるとき，f に関して**保存則**が成り立つといい，f を**ラグランジュ方程式 (3.11) の保存量**と呼ぶ[*5]．

定義 3.1 $\phi: D\longrightarrow \mathsf{V}$ を微分可能なベクトル場とし (付録 D を参照)，$\phi(D)\subset D$ を満たすものとする．このとき，写像 $\phi_*: D\times\mathsf{V}\longrightarrow D\times\mathsf{V}$ を

$$\phi_*(x,v) := (\phi(x),\phi'(x)(v)),\quad (x,v)\in D\times\mathsf{V} \tag{3.12}$$

によって定義できる．ただし，ϕ' は ϕ の導関数である (付録 D を参照;$\phi'(x)\in \mathsf{L}(\mathsf{V})$ $(\forall x\in D)$)．もし

$$L(\phi_*(x,v)) = L(x,v),\quad (x,v)\in D\times\mathsf{V} \tag{3.13}$$

が成り立つならば，ラグランジュ系 (D,L) は ϕ を**許容する**という．

ϕ_* が全単射である場合に，ラグランジュ系 (D,L) が ϕ を許容することは，第1章の用語法でいえば，ラグランジュ関数 L が ϕ_* 対称であるということである．

$\{e_i\}_{i=1}^d$ を V の任意の基底とする．原点を含む区間 $K\subset\mathbb{R}$ の各点 s に対して，写像 $\phi_s: D\longrightarrow D$ で次の性質 (i), (ii) を満たすものが与えられているとする：

(i) $\phi_0 = I_{\mathsf{V}}$.

(ii) ベクトル値関数 $(s,x)\longmapsto\phi_s(x)$ は連続微分可能.

写像 $I_L: D\times\mathsf{V}\longrightarrow\mathbb{R}$ を

$$I_L(x,v) := \sum_{i=1}^d \frac{\partial L(x,v)}{\partial v^i}\frac{\partial\phi_s^i(x)}{\partial s}\bigg|_{s=0},\quad (x,v)\in D\times\mathsf{V} \tag{3.14}$$

によって定義する．ただし，$x=\sum_{i=1}^d x^i e_i, v=\sum_{i=1}^d v^i e_i, \phi_s(x)=\sum_{i=1}^d \phi_s^i(x)e_i$.

補題 3.2 $I_L(x,v)$ は基底 $\{e_i\}_{i=1}^d$ の取り方によらない．

[*5] いうまでもなく，f は，別のラグランジュ関数から定まるラグランジュ方程式の保存量になるとは限らない．

証明　別の基底 $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^d$ をとり，$\tilde{e}_i=\sum_{j=1}^d P_i^j e_j$ とし，$x=\sum_{i=1}^d x^i e_i=\sum_{i=1}^d \tilde{x}^i\tilde{e}_i, v=\sum_{i=1}^d v^i e_i=\sum_{i=1}^d \tilde{v}^i\tilde{e}_i$ とすれば

$$\frac{\partial L(x,v))}{\partial v^i}=\sum_{j=1}^d (P^{-1})_i^j \frac{\partial L(x,v)}{\partial \tilde{v}^j},\quad x\in D, v\in \mathsf{V}.$$

したがって，任意の $u=\sum_{i=1}^d u^i e_i=\sum_{i=1}^d \tilde{u}^i\tilde{e}_i\in\mathsf{V}$ に対して

$$\sum_{i=1}^d \frac{\partial L(x,v)}{\partial v^i}u^i=\sum_{j=1}^d\left(\sum_{i=1}^d (P^{-1})_i^j u^i\right)\frac{\partial L(x,v)}{\partial \tilde{v}^j}=\sum_{j=1}^d \frac{\partial L(x,v)}{\partial \tilde{v}^j}\tilde{u}^j. \qquad \blacksquare$$

定理 3.3 (ネーターの定理)　ϕ_s を上述のものとし，ラグランジュ系 (D,L) は，各 ϕ_s $(s\in K)$ を許容するとする．このとき，I_L はラグランジュ方程式 (3.11) の保存量である (すなわち，(3.11) の任意の解 $X(t)$ に対して，$I_L(X(t),\dot{X}(t))$ は t によらない定数).

証明　写像 $Y_s:\mathbb{I}\longrightarrow\mathsf{V}$ を $Y_s(t):=\phi_s(X(t))$ $(t\in\mathbb{I})$ によって定義する．このとき

$$\dot{Y}_s(t)=\sum_{j=1}^d\sum_{i=1}^d \dot{X}^i(t)\frac{\partial\phi_s^j(X(t))}{\partial X^i(t)}e_j=\phi_s'(X(t))(\dot{X}(t)).$$

したがって，$L((\phi_s)_*(X(t),\dot{X}(t)))=L(Y_s(t),\dot{Y}_s(t))$. これと仮定により

$$L(Y_s(t),\dot{Y}_s(t))=L(X(t),\dot{X}(t)). \tag{3.15}$$

したがって，Y_s もラグランジュ方程式 (3.11) を満たす：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(Y_s(t),\dot{Y}_s(t))}{\partial \dot{Y}_s^i(t)}=\frac{\partial L(Y_s(t),\dot{Y}_s(t))}{\partial Y_s^i(t)}. \tag{3.16}$$

(3.15) の右辺は s によらないから

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial L(Y_s(t),\dot{Y}_s(t))}{\partial s}\\&=\sum_{i=1}^d\frac{\partial Y_s^i(t)}{\partial s}\frac{\partial L(Y_s(t),\dot{Y}_s(t))}{\partial Y_s^i(t)}+\sum_{i=1}^d\frac{\partial \dot{Y}_s^i(t)}{\partial s}\frac{\partial L(Y_s(t),\dot{Y}_s(t))}{\partial \dot{Y}_s^i(t)}.\end{aligned}$$

これに (3.16) を代入し，整理すれば $\left(\dfrac{\partial\dot{Y}_s(t)}{\partial s}=\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial Y_s(t)}{\partial s}\right.$ も用いる$\Big)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^d\frac{\partial Y_s^i(t)}{\partial s}\frac{\partial L(Y_s(t),\dot{Y}_s(t))}{\partial \dot{Y}_s^i(t)}\right)=0$$

が得られる．$\phi_0(x)=x$ $(\forall x\in D)$ (したがって $\phi_0'(v)=v$ $(v\in\mathsf{V})$) であるから，上式

で $s=0$ とすれば $(Y_s^i(t)|_{s=0}=X^i(t), \dot{Y}_s^i(t)|_{s=0}=\dot{X}(t)$ に注意) $\dfrac{d}{dt}I(X(t),\dot{X}(t))=0$ が導かれる．したがって，題意が成立する． ■

3.4　ネーターの定理の応用

(3.7) によって定義されるラグランジュ関数 L_V を考える．このラグランジュ関数から定まるラグランジュ方程式は，力場 $F=-\mathrm{grad}\,V$ のニュートンの運動方程式 (3.2) であることを思い出しておこう．

3.4.1　ポテンシャルの空間並進対称性と運動量保存則

あるベクトル $a\in \mathsf{V}\setminus\{0\}$ があって，任意の $s\in\mathbb{R}$ と $x\in D$ に対して $x+sa\in D$ かつ $V(x+sa)=V(x)$ が成り立つとしよう．これは，V が a 方向への並進対称性を持つということである．$\phi_s:D\longrightarrow D$ を $\phi_s(x):=x+as$ によって定義する．この場合，$\phi_s'(x)=I_{\mathsf{V}}$ であることは容易にわかる (微分の定義にしたがって計算せよ)．したがって，$L_V((\phi_s)_*(x,v))=L_V(x,v)$ $((x,v)\in D\times \mathsf{V})$．また，$(\phi_s)_*$ は全単射であることも容易に示される．したがって，L_V は $(\phi_s)_*$ 対称である．ゆえに，$L=L_V$ と考察下の ϕ_s に関して，ネーターの定理を応用できる．いまの場合，$g_{ij}:=\langle e_i,e_j\rangle_{\mathsf{V}}$ とすれば

$$\frac{\partial L_V(X(t),\dot{X}(t))}{\partial \dot{X}^i(t)}=m\sum_{j=1}^{d} g_{ij}\dot{X}^j(t), \qquad \left.\frac{\partial \phi_s^i(X(t))}{\partial s}\right|_{s=0}=a^i$$

であるので，$I_{L_V}(X(t),\dot{X}(t))=\langle a,m\dot{X}(t)\rangle_{\mathsf{V}}$．これは a 方向の運動量を表す．よって，ポテンシャル V が a 方向について並進対称性を持つならば，ニュートンの運動方程式 (3.2) にしたがう運動において，a 方向の運動量は保存される．こうして，**ポテンシャルの並進対称性は運動量保存則を導く**ことがわかる．

3.4.2　ポテンシャルの広義回転対称性と軌道角運動量保存則

$\{e_i\}_{i=1}^d$ を V の任意の正規直交基底としよう：$\langle e_i,e_j\rangle_{\mathsf{V}}=\delta_{ij}$ $(i,j=1,\cdots,d)$．この基底により，任意の点 $x\in\mathsf{V}$ を展開する：$x=\sum_{i=1}^{d}x^ie_i$．いまの場合 $x^i=\langle e^i,x\rangle_{\mathsf{V}}$ である．2 つのベクトル e_i と e_j $(i<j)$ から生成される部分空間を P_{ij} としよう：$\mathsf{P}_{ij}:=\{ae_i+be_j\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$．各 $\theta\in\mathbb{R}$ に対して，写像 $R_{ij}(\theta):\mathsf{V}\longrightarrow\mathsf{V}$ を次のように定義する：

$$R_{ij}(\theta)(x) := \sum_{k=1}^{d} x^k(\theta)e_k, \tag{3.17}$$

$$x^i(\theta) := x^i \cos\theta - x^j \sin\theta, \quad x^j(\theta) := x^i \sin\theta + x^j \cos\theta, \tag{3.18}$$

$$x^k(\theta) := x^k, \quad k \neq i, j. \tag{3.19}$$

容易にわかるように，$R_{ij}(\theta) \in \mathsf{O}(\mathsf{V})$ である．$x \in \mathsf{P}_{ij}$ であれば，$R_{ij}(\theta)(x)$ は x を平面 P_{ij} の原点のまわりに角度 θ だけ回転して得られる点である[*6]．そこで，写像 $R_{ij}(\theta)$ を**平面 P_{ij} における角度 θ の回転**と呼ぶ．直接計算により

$$R_{ij}(\theta)R_{ij}(\chi) = R_{ij}(\theta+\chi), \quad \theta, \chi \in \mathbb{R} \tag{3.20}$$

が成り立つことがわかる．したがって，$\{R_{ij}(\theta)|\theta \in \mathbb{R}\}$ は $\mathsf{O}(\mathsf{V})$ の可換な部分群である．

さて，ポテンシャル V は，平面 P_{ij} における回転に関して対称性を持つとしよう．すなわち，すべての $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$V(R_{ij}(\theta)(x)) = V(x), \quad \forall x \in D \tag{3.21}$$

が成り立つとする．写像 $\phi_\theta : D \longrightarrow \mathsf{V}$ を

$$\phi_\theta(x) := R_{ij}(\theta)(x), \quad x \in D \tag{3.22}$$

によって定義すれば，これは θ と x について連続微分可能であり

$$\phi'_\theta(x)(v) = R_{ij}(\theta)(v), \quad v \in \mathsf{V}, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial \phi_\theta(x)}{\partial \theta} = -(x^i \sin\theta + x^j \cos\theta)e_i + (x^i \cos\theta - x^j \sin\theta)e_j. \tag{3.24}$$

(3.21) と (3.23) によって，$L_V((\phi_\theta)_*(x,v)) = L_V(x,v)$ が成り立つので，ラグランジュ系 (D, L_V) は各 ϕ_θ を許容する．したがって，この系にネーターの定理が適用できる．いまの場合，(3.24) に注意すれば

$$I_{L_V}(x,v) = x^i(mv^j) - x^j(mv^i)$$

となることがわかる．よって，$X(t)$ がニュートンの運動方程式の解であるとき $X^i(t)(mv^j(t)) - X^j(t)(mv^i(t))$ $(v^i(t) := \dot{X}^i(t))$ は t によらない定数である．一方，この量は，軌道角運動量の (基底 $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ に関する) (i,j) 成分に他ならない ((2.38) を参照)．こうして，**ポテンシャル V の部分群 $\{R_{ij}(\theta)|\theta \in \mathbb{R}\}$ に関する広義回転対称は，軌道角運動量の (i,j) 成分の保存則を導く**ことがわかる．ゆえに，特に，V が広義回転対称であれば，軌道角運動量は保存される．

[*6] たとえば，$\mathsf{V} = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ で $\{e_i\}_i$ が標準基底の場合を考えてみるとわかりやすいであろう．

3.5　時間並進対称性とエネルギー保存則

先述のネーターの定理は，空間的な操作 (D 上の写像) に関わるラグランジュ関数の対称性と保存量の存在に関するものである．第 2 章で見たように，時間的な操作 — 典型的には時間並進 — についても対称性は存在しうるので，これをラグランジュ関数との関連で考察するのは自然である．この考察を行うために，変数 (x,v) の他に時間に関わる変数の組 $(t,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ を付け加えた新しいラグランジュ関数 $\hat{L}((x,t),(v,\xi))$ を

$$\hat{L}((x,t),(v,\xi)) := L\left(x,\frac{v}{\xi}\right)\xi \tag{3.25}$$

によって定義する．この定義から明らかなように，じつは，$\hat{L}$ は t にはよっていない．したがって，$\phi_s : D\times\mathbb{R}\longrightarrow D\times\mathbb{R}$ を $\phi_s(x,t)=(x,t+s)$ $((x,t)\in D\times\mathbb{R})$ によって定義すれば ($\phi'_s(v,\xi)=(v,\xi)$ $((v,\xi)\in\mathsf{V}\oplus\mathbb{R})$ に注意)

$$\hat{L}((\phi_s)_*((x,t),(v,\xi))=\hat{L}((x,t),(v,\xi)).$$

この場合，$\partial_s\phi_s(x,t)/\partial s=(0,1)\in\mathsf{V}\times\mathbb{R}$ であるから

$$I_{\hat{L}}((x,t),(v,\xi))=\frac{\partial\hat{L}((x,t),(v,\xi))}{\partial\xi} \tag{3.26}$$

$$=-\sum_{i=1}^{d}\frac{v^i}{\xi^2}\frac{\partial L(x,u)}{\partial u^i}\bigg|_{u=v/\xi}\xi+L\left(x,\frac{v}{\xi}\right). \tag{3.27}$$

したがって，$Y(\tau)=(X(\tau),t(\tau))$ $(\tau\in\mathbb{R})$ が $\hat{L}$ に関するラグランジュ方程式

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\hat{L}(Y(\tau),\dot{Y}(\tau))}{\partial\dot{X}^i(\tau)}-\frac{\partial\hat{L}(Y(\tau),\dot{Y}(\tau))}{\partial X^i(\tau)}=0, \tag{3.28}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\hat{L}(Y(\tau),\dot{Y}(\tau))}{\partial\dot{t}(\tau)}-\frac{\partial\hat{L}(Y(\tau),\dot{Y}(\tau))}{\partial t(\tau)}=0 \tag{3.29}$$

の解ならば，ネーターの定理を $\hat{L}$ に応用することにより，$I_{\hat{L}}(Y(\tau),\dot{Y}(\tau))$ は τ によらない定数であることがわかる．

さて，X を L から定まるラグランジュ方程式 (3.11) の任意の解であるとする．このとき，$Y_X(\tau):=(X(\tau),\tau)$ $(t(\tau)=\tau$ とする) は $\hat{L}$ に関するラグランジュ方程式 (3.28), (3.29) の解であることがわかる (いまの場合，$\dot{t}(\tau)=1$ に注意)．そこで

$$J_L(t):=I_{\hat{L}}(Y_X(t),\dot{Y}_X(t)) \tag{3.30}$$

とおけば (τ をあらためて t と書く)

$$J_L(t) = -\sum_{i=1}^{d} \dot{X}^i(t) \frac{\partial L(X(t),\dot{X}(t))}{\partial \dot{X}^i(t)} + L(X(t),\dot{X}(t)) \tag{3.31}$$

であり，これは t によらないことが結論される．こうして，次の定理が得られる：

定理 3.4　写像 $E_L : D \times \mathsf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$E_L(x,v) := \sum_{i=1}^{d} v^i \frac{\partial L(x,v)}{\partial v^i} - L(x,v), \quad (x,v) \in D \times \mathsf{V} \tag{3.32}$$

によって定義する．このとき，E_L は L から定まるラグランジュ方程式 (3.11) の保存量である

証明　上述の事実と $J_L(t) = -E_L(X(t),\dot{X}(t))$ に注意すればよい．■

注意 3.5　この定理は，ラグランジュ方程式 (3.11) を用いて直接 $\dfrac{dE_L(X(t),\dot{X}(t))}{dt} = 0$ を示すことによっても証明される．だが，この場合は，E_L の "由来" がわからない．

例 3.6　$L = L_V$ (ポテンシャル V から定まるラグランジュ関数) の場合を考えると，$\sum_{i=1}^{d} v^i (\partial L_V(x,v)/\partial v^i) = m\|v\|^2$ であるから

$$E_{L_V}(x,v) = \frac{m}{2}\|v\|^2 + V(x) = T(v) + V(x), \quad (x,v) \in D \times \mathsf{V} \tag{3.33}$$

となる．これは，第 2 章，2.3.3 項で導入した全力学的エネルギーに他ならない．したがって，定理 3.4 は，この場合，力学的エネルギー保存則を導く．こうして，ポテンシャル V から定まる力場のもとでの運動における力学的エネルギー保存則は，じつは，ラグランジュ関数 $\hat{L}_V$ の時間並進対称性の帰結であることが理解される．

いまの例に鑑みて，(3.32) によって定義される写像 E_L をラグランジュ関数 L から定まる**エネルギー**と呼び，定理 3.4 にいう事実を**ラグランジュ関数 L に関するエネルギー保存則**という．いうまでもなく，ここでの術語 "エネルギー" は，通常の全力学的エネルギー概念を包括する普遍的な量に対するメタ言語的な名称である．

3.6　ハミルトン形式

$L : D \times \mathsf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ をラグランジュ関数としよう．このとき，L から定まるエネルギー E_L は L に付随する自然な写像の 1 つと見ることができる．そこで今度は，L

のかわりに，E_L を用いてラグランジュ方程式を書き換えることを考える．そのための鍵となるのは，(3.32) の右辺第1項の中に現れている関数

$$\xi_i = \frac{\partial L(x,v)}{\partial v^i} \tag{3.34}$$

を1つの変数とみなす視点へ移行することである．ただし，v^i は V の任意の正規直交基底 $E=\{e_i\}_{i=1}^d$ に関する $v\in\mathsf{V}$ の第 i 成分を表す．

例 3.7 $L=L_V$ の場合は $\xi_i=mv^i$ であるから，ξ_i は運動量の成分である．だが，成分は基底の取り方によっているので，$\{\xi_i\}_i$ から基底の取り方によらない量をつくる必要がある．以下で，一般の場合にこれを行う．

3.6.1 一般化運動量

$\{\phi^i\}_{i=1}^d$ を $E=\{e_i\}_{i=1}^d$ の双対基底とし

$$\xi=\sum_{i=1}^d \xi_i\phi^i=\sum_{i=1}^d \frac{\partial L(x,v)}{\partial v^i}\phi^i \in \mathsf{V}^* \tag{3.35}$$

を考える*7．このとき，ベクトル ξ は基底 E の取り方によらないことが次のようにしてわかる．V の別の基底 $F=\{f_i\}_{i=1}^d$ をとり，$P=(P_j^i)$ を底の変換：$E\longmapsto F$ の行列とする：$f_i=\sum_{j=1}^d P_i^j e_j$．$F$ に関する v の第 i 成分を u^i とし，$\eta_i=\partial L(x,v)/\partial u^i$ とおく．座標変換公式により $v^i=\sum_{j=1}^d P_j^i u^j$．$\{f_i\}_{i=1}^d$ の双対基底を $\{\psi^i\}_{i=1}^d$ とすれば $\psi^i=\sum_{j=1}^d (P^{-1})_j^i\phi^j$．したがって

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^d \eta_i\psi^i &= \sum_{i,k=1}^d \frac{\partial L(x,v)}{\partial u^i}(P^{-1})_k^i\phi^k=\sum_{i,j,k=1}^d \frac{\partial v^j}{\partial u^i}\frac{\partial L(x,v)}{\partial v^j}(P^{-1})_k^i\phi^k\\ &=\sum_{i,j,k=1}^d P_i^j\frac{\partial L(x,v)}{\partial v^j}(P^{-1})_k^i\phi^k.\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^d P_i^j(P^{-1})_k^i=(PP^{-1})_k^j=\delta_k^j$ に注意すれば，上の最後の式は $\sum_{j=1}^d \xi_j\phi^j$ に等しいことがわかる．こうして，ξ は基底の取り方によらない絶対的な量である．これを L に関する**一般化運動量**あるいは x に**共役な運動量**と呼ぶ．

*7 ベクトル空間の一般論により，添字が下付きのスカラー量は，双対空間のベクトルの成分と考えるのが自然なのである．

3.6.2 ルジャンドル変換とハミルトン関数

(3.35) によって定義される $\xi=\xi(x,v)$ はもちろん，x,v の V^* 値関数である．$x\in D, p\in\mathsf{V}^*$ が与えられたとき，$p=\xi(x,v)$ は，v についての方程式と見ることができる．この方程式が任意の $x\in D, p\in\mathsf{V}^*$ に対して解を持ち

$$v=u(x,p), \quad u:D\times\mathsf{V}^*\longrightarrow\mathsf{V} \tag{3.36}$$

という形に表されると仮定しよう．したがって

$$p=\xi(x,u(x,p)), \quad (x,p)\in D\times\mathsf{V}^*. \tag{3.37}$$

そこで，関数 $H_L:D\times\mathsf{V}^*\longrightarrow\mathbb{R}$ を

$$H_L(x,p):=\sum_{i=1}^{d}u(x,p)^i p_i-L(x,u(x,p)), \quad (x,p)\in D\times\mathsf{V}^* \tag{3.38}$$

によって導入すれば

$$E_L(x,v)\Big|_{v=u(x,p)}=H_L(x,p) \tag{3.39}$$

が成り立つことになる．これからわかるように，関数 H_L はエネルギー E_L を位置 x と一般化運動量 $p\in\mathsf{V}^*$ を用いて表したものである．H_L をラグランジュ関数 L に対する**ハミルトン関数**または**ハミルトニアン**と呼ぶ．

対応：$L\longmapsto H_L$ を**ルジャンドル変換**という．これは，$D\times\mathsf{V}$ 上の関数から $D\times\mathsf{V}^*$ 上の関数を構成するための 1 つの自然な構造と見ることができる．たが，ルジャンドル変換が可能なのは，任意の $(x,p)\in D\times\mathsf{V}^*$ に対して $p_i=\partial L(x,v)/\partial v^i$ $(i=1,\cdots,d)$ が解 v を持つときのみ可能であることに注意しよう．

例 3.8 $L=L_V$ の場合，例 3.7 より，$v=p/m$ ($u(x,p)=p/m$ となる場合)．したがって

$$H_{L_V}(x,p)=\frac{\|p\|^2}{2m}+V(x). \tag{3.40}$$

これは，ポテンシャル V に対する**ハミルトニアン**と呼ばれる．

3.6.3 ラグランジュ方程式の書き換え

次にラグランジュ方程式 (3.11) を H_L を用いて表すことを考えよう．そこで，$(x,p)\in D\times\mathsf{V}^*$ を $x=\sum_{i=1}^{d}x^i e_i, p=\sum_{i=1}^{d}p_i\phi^i$ と展開する．このとき (3.38) より

$$\frac{\partial H_L(x,p)}{\partial p_i}=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial u(x,p)^j}{\partial p_i}p_j+u(x,p)^i-\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial u(x,p)^j}{\partial p_i}\,\frac{\partial L(x,v)}{\partial v^j}\Big|_{v=u(x,p)}$$

$$=u(x,p)^i.$$

同様に

$$\frac{\partial H_L(x,p)}{\partial x^i}=-\left.\frac{\partial L(x,v)}{\partial x^i}\right|_{v=u(x,p)}.$$

したがって，$X(t)$ がラグランジュ方程式 (3.11) の解であるとし

$$P(t):=\sum_{i=1}^{d}P_i(t)\phi^i,\quad P_i(t):=\frac{\partial L(X(t),\dot{X}(t))}{\partial \dot{X}^i(t)} \tag{3.41}$$

とすれば — (3.36) により $u(X(t),P(t))=\dot{X}(t)$ であることに注意 —

$$\frac{dX^i(t)}{dt}=\frac{\partial H_L(X(t),P(t))}{\partial P_i(t)}, \tag{3.42}$$

$$\frac{dP_i(t)}{dt}=-\frac{\partial H_L(X(t),P(t))}{\partial X^i(t)},\quad i=1,\cdots,d \tag{3.43}$$

が成り立つことがわかる．逆に，次の事実も成立する：

定理 3.9 L は2回連続微分可能であるとする．このとき，$(X(t),P(t))$ が方程式 (3.42), (3.43) の解ならば，$X(t)$ はラグランジュ方程式 (3.11) の解である

証明 まず，$L(x,v)=\sum_{i=1}^{d}v^i\xi_i-H(x,\xi)$ に注意する (ξ は (3.34), (3.35) によって定義される)．したがって，合成関数の微分法により

$$\frac{\partial L(x,v)}{\partial x^i}=\sum_{j=1}^{d}v^j\frac{\partial^2 L(x,v)}{\partial x^i\partial v^j}-\frac{\partial H_L(x,\xi)}{\partial x^i}-\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2 L(x,v)}{\partial x^i\partial v^j}\left.\frac{\partial H_L(x,p)}{\partial p_j}\right|_{p=\xi}.$$

これと (3.43) によって

$$\partial L(X(t),\dot{X}(t))/\partial X^i(t)=\dot{P}_i(t).$$

これと (3.41) により題意が成立する． ■

こうして，L に対して仮定された条件のもとで，連立常微分方程式 (3.42), (3.43) はラグランジュ方程式と同等であることがわかる．

3.6.4 ハミルトン方程式

連立常微分方程式 (3.42), (3.43) は，1階の微分方程式である．だが，これは座標表示 (成分表示) によっているので，このままでは，その本質は見えにくい．そこで，これを V の座標の取り方，換言すれば，V の基底の取り方によらない形に書き換えることを考える．そのための基本となる着想は，$(x^1,\cdots,x^d,p_1,\cdots,p_d)$ を

あるベクトル空間の特定の基底に関する座標表示と見ることである．この場合，そのベクトル空間の候補としては

$$\mathsf{M}_\mathsf{V} := \mathsf{V} \oplus \mathsf{V}^* = \{(x,p) \mid x \in \mathsf{V}, p \in \mathsf{V}^*\} \tag{3.44}$$

— V と V^* の直和ベクトル空間 (付録 B, 例 B.2 を参照) — を考えるのが自然であることは容易に推測されよう．$\{e_i\}_{i=1}^d$ を V の任意の基底とし，$\{\phi^i\}_{i=1}^d$ をその双対基底とし

$$\hat{e}_i := (e_i, 0) \in \mathsf{M}_\mathsf{V}, \quad \hat{\phi}^i := (0, \phi^i) \in \mathsf{M}_\mathsf{V}, \quad i = 1, \cdots, d \tag{3.45}$$

とすれば，$\{\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_d, \hat{\phi}^1, \cdots, \hat{\phi}^d\}$ は M_V の基底である．これを見るには，任意の $(x,p) \in \mathsf{M}_\mathsf{V}$ は

$$(x,p) = \sum_{i=1}^d x^i \hat{e}_i + \sum_{i=1}^d p_i \hat{\phi}^i \tag{3.46}$$

と展開されること，および $\{\hat{e}_i, \hat{\phi}^i \mid i = 1, \cdots, d\}$ の線形独立性を確かめればよい．

さて，$X^i(t), P_i(t)$ $(i = 1, \cdots, d)$ を (3.42), (3.43) の解とし，写像 $W : \mathbb{I} \longrightarrow \mathsf{M}_\mathsf{V}$ を

$$W(t) := \sum_{i=1}^d X^i(t) \hat{e}_i + \sum_{i=1}^d P_i(t) \hat{\phi}^i, \quad t \in \mathbb{I} \tag{3.47}$$

によって定義する．また，写像 $G : D \times \mathsf{V}^* \longrightarrow \mathsf{M}_\mathsf{V}$ を

$$G(x,p) := \sum_{i=1}^d \frac{\partial H_L(x,p)}{\partial p_i} \hat{e}_i - \sum_{i=1}^d \frac{\partial H_L(x,p)}{\partial x^i} \hat{\phi}^i \tag{3.48}$$

によって定義しよう．このとき，(3.42), (3.43) は

$$\frac{dW(t)}{dt} = G(W(t)) \tag{3.49}$$

という単独の方程式と同値である．この方程式が意味を持つためには，G が基底の取り方によらずにハミルトン関数 H_L だけから定まることを示さなければならない．これは，もっとも直接的には，別の基底による G の定義が上の定義と一致することを証明することによってなされる．だが，ここでは，方程式 (3.49) の普遍的構造を調べることを通してそれを証明しよう．

ハミルトン関数 H_L は M_V の部分集合 $D \times \mathsf{V}^*$ の実スカラー場であるから，それに付随する自然な概念の 1 つとして，微分形式 $dH_L : D \times \mathsf{V}^* \longrightarrow \mathsf{M}_\mathsf{V}^*$ (M_V の双対空間) が存在することに注目する (付録 D.4, D.4.1 項を参照)．そこで，M_V^* を具体的に同定しよう．

各 $(p,x) \in \mathsf{V}^* \oplus \mathsf{V}$ に対して，写像 $\iota_{p,x} : \mathsf{M}_\mathsf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\iota_{p,x}(u,\phi) := p(u) + \phi(x), \quad (u,\phi) \in \mathsf{M}_\mathsf{V} \tag{3.50}$$

によって定義する．このとき，$\iota_{p,x}$ は線形であることが容易に確かめられる．したがって $\iota_{p,x} \in \mathsf{M}_{\mathsf{V}}^*$. そこで，写像 $\iota : \mathsf{V}^* \oplus \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{M}_{\mathsf{V}}^*$ を

$$\iota(p,x) := \iota_{p,x}, \quad (p,x) \in \mathsf{V}^* \oplus \mathsf{V} \tag{3.51}$$

によって定義する．

補題 3.10　上の ι は同型写像 (i.e., 線形かつ全単射) である．

証明　ι の線形性は定義にしたがって計算すれば直接に確かめられる．$\iota(p,x)=0$ ならば，$p(u)+\phi(x)=0$ $(\forall(u,\phi)\in \mathsf{M}_{\mathsf{V}})$. 特に $\phi=0$ とすれば，$p(u)=0$ $(\forall u \in \mathsf{V})$ であるから，$p=0$. したがって，$\phi(x)=0$ $(\forall \phi \in \mathsf{V}^*)$. ゆえに $x=0$. ゆえに $(p,x)=0$. よって，ι は単射である．$\mathsf{V}^* \oplus \mathsf{V}$ および $\mathsf{M}_{\mathsf{V}}^*$ はいずれも有限次元 ($2d$ 次元) であるから，ι の全射性は単射性からしたがう．■

いま証明した補題の意味において，$\mathsf{M}_{\mathsf{V}}^*$ は $\mathsf{V}^* \oplus \mathsf{V}$ と同一視できる．これは，$(p,x) \in \mathsf{V}^* \oplus \mathsf{V}$ を M_{V} 上の線形汎関数としては $(p,x)(u,\phi) := p(u)+\phi(x)$ $((u,\phi)\in \mathsf{M}_{\mathsf{V}})$ と見るということである．以下，この同一視を用いる．

写像 $J_{\mathsf{V}} : \mathsf{M}_{\mathsf{V}}^* \longrightarrow \mathsf{M}_{\mathsf{V}}$ を

$$J_{\mathsf{V}}(p,x) := (x,-p), \quad (p,x) \in \mathsf{M}_{\mathsf{V}}^* \tag{3.52}$$

によって定義する．これは同型写像であり，その逆写像は

$$J_{\mathsf{V}}^{-1}(x,p) = (-p,x), \quad (x,p) \in \mathsf{M}_{\mathsf{V}} \tag{3.53}$$

で与えられることがわかる．

各 $(x,p) \in D \times \mathsf{V}$ に対して $(dH_L)(x,p) \in \mathsf{M}_{\mathsf{V}}^*$ であるから，$J_{\mathsf{V}}((dH_L)(x,p)) \in \mathsf{M}_{\mathsf{V}}$. これを基底 $\mathscr{E} := (\hat{e}_1,\cdots,\hat{e}_d,\hat{\phi}^1,\cdots,\hat{\phi}^d)$ によって展開してみよう (基底の順序付けを行っておく)．$\tilde{e}_i := (0,e_i) \in \mathsf{V}^* \oplus \mathsf{V}, \tilde{\phi}^i := (\phi^i,0) \in \mathsf{V}^* \oplus \mathsf{V}$ とすれば，$(\tilde{\phi}^1,\cdots,\tilde{\phi}^d, \tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_d)$ は $\mathscr{E}$ の双対基底である．微分の座標表示の公式 (付録 D.4, 例 D.8 を参照) により

$$(dH_L)(x,p) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial H_L(x,p)}{\partial x^i}\tilde{\phi}^i + \sum_{i=1}^d \frac{\partial H_L(x,p)}{\partial p_i}\tilde{e}_i.$$

したがって ($J_{\mathsf{V}}\tilde{\phi}^i = -\hat{\phi}^i, J_{\mathsf{V}}\tilde{e}_i = \hat{e}_i$ に注意)

$$J_{\mathsf{V}}((dH_L)(x,p)) = -\sum_{i=1}^d \frac{\partial H_L(x,p)}{\partial x^i}\hat{\phi}^i + \sum_{i=1}^d \frac{\partial H_L(x,p)}{\partial p_i}\hat{e}_i. \tag{3.54}$$

これと (3.48) を見比べると

$$G(x,p) = J_{\mathsf{V}}((dH_L)(x,p)) \tag{3.55}$$

が結論される．右辺は，もちろん基底の取り方によらない量であるから，$G(x,p)$ もそうである．そして，方程式 (3.42), (3.43) は

$$\frac{dW(t)}{dt} = J_{\mathsf{V}}((dH_L)(W(t))) \tag{3.56}$$

という普遍的な形をとる．すると，これはさらに一般的な方程式の特殊な場合であることが見てとれる．すなわち，次の定義へと到る：

定義 3.11 連続微分可能な関数 $H: D\times\mathsf{V}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ を**ハミルトン関数**または**ハミルトニアン**といい，対応：$(x,p) \longmapsto J_{\mathsf{V}}((dH)(x,p)) \in \mathsf{M}_{\mathsf{V}}$ を $D\times\mathsf{V}^*$ 上の**ハミルトンベクトル場**と呼ぶ．

連続微分可能な写像 $Z: \mathbb{I} \longrightarrow D\times\mathsf{V}^*$ ($D\times\mathsf{V}^*$ の中の連続微分可能な曲線) に関する方程式

$$\frac{dZ(t)}{dt} = J_{\mathsf{V}}((dH)(Z(t))) \tag{3.57}$$

を H **から定まるハミルトン方程式**と呼ぶ．

以上の理論展開から明らかにされたように，方程式の組 (3.42), (3.43) は，$H = H_L$ の場合のハミルトン方程式 (3.57)，すなわち，(3.56) を $\mathsf{V}\oplus\mathsf{V}^*$ の基底 $(\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_d, \hat{\phi}^1, \cdots, \phi^d)$ に関する成分表示を用いて表したものである．物理学の文献では，(3.42), (3.43) は，通常，**ハミルトンの正準方程式**と呼ばれる．だが (歴史的な事情があるとはいえ) この命名は，現代的な観点からは，あまり適切なものとはいえない．あえて呼ぶならば，ハミルトン方程式の正準形あるいは標準形とでもすべきである．なぜなら，“最初にある” のは，座標の取り方とは独立な絶対的方程式 (3.57) だからである．

力学系をハミルトン方程式 (3.57) を用いて考察する形式を**ハミルトン形式**と呼ぶ．この場合，$D\times\mathsf{V}^*$ をハミルトン形式における**相空間**という．相空間 $D\times\mathsf{V}^*$ の任意の点 (x,p) は考察下の**力学系の状態**を表す．ハミルトン関数 H の点 $(x,p) \in D\times\mathsf{V}^*$ での値 $H(x,p)$ を状態 (x,p) での系の**エネルギー**と呼ぶ．

ハミルトン形式における相空間 $D\times\mathsf{V}^*$ は，ニュートンの運動方程式を用いる形式あるいはラグランジュ形式における相空間 $D\times\mathsf{V}$ とは概念的に異なるものであることに注意しよう (したがって，系の状態の概念もハミルトン形式とラグランジュ形式では異なる)．このことからも示唆されるように，ラグランジュ形式と

ハミルトン形式は，数学的には，本来，独立な形式であり，それぞれに固有の価値と意味を持つ．ただし，すでに見たように，両者はより低次の理論的レヴェル，すなわち，ハミルトン関数がラグランジュ関数のルジャンドル変換で与えられる場合においては同等な記述を与える．

3.7 エネルギー保存則

前節の定義 3.11 で導入したハミルトン関数は，ラグランジュ関数とは独立した概念であって，ポテンシャルから定まるハミルトン関数を含む 1 つの普遍的な関数概念である．したがって，自然な思考の展開として，次の問いを立てることができる：この普遍的なレヴェルにおけるエネルギーに対しても保存則が成り立つであろうか? 結論からいえば，この問いに対する答えは肯定的であり，次の定理が成り立つ：

定理 3.12 (エネルギー保存則) $H: D\times \mathsf{V}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ をハミルトン関数とし，$Z(t)$ はハミルトン方程式 (3.57) の任意の解とする．このとき，$H(Z(t))$ は t によらない定数である (すなわち，H は方程式 (3.57) の保存量).

証明 $\mathsf{V}\oplus\mathsf{V}^*$ の順序付けられた基底 $(\hat{e}_1,\cdots,\hat{e}_d,\hat{\phi}^1,\cdots,\hat{\phi}^d)$ ($\mathsf{V}^*\oplus\mathsf{V}$ の基底として $(\tilde{\phi}^1,\cdots,\tilde{\phi}^d,\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_d)$ をとる) に関する J_{V} の行列表示を J_d とすれば，(3.52) により

$$J_d = \begin{pmatrix} 0_d & I_d \\ -I_d & 0_d \end{pmatrix} \tag{3.58}$$

であることがわかる[*8]．ただし，I_d は d 次の単位行列，0_d は d 次の零行列である．$Z(t) = \sum_{i=1}^{d} Z^i(t)\hat{e}_i + \sum_{i=1}^{d} Z^{d+i}(t)\hat{\phi}^i$ と展開する．したがって

$$\frac{dH(Z(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{d} \dot{Z}^i(t)\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}\Big|_{(x,p)=Z(t)} + \sum_{i=1}^{d} \dot{Z}^{i+d}\frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i}\Big|_{(x,p)=Z(t)}. \tag{3.59}$$

他方，(3.57) と dH の定義および (3.58) によって

$$\dot{Z}^i(t) = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i}\Big|_{(x,p)=Z(t)}, \tag{3.60}$$

---

*8 $\Phi^i := \tilde{\phi}^i, \Phi^{i+d} = \tilde{e}_i, E_i = \hat{e}_i, E_{i+d} = \hat{\phi}^i$ $(i=1,\cdots,d)$ とするとき (したがって，$(\Phi^1,\cdots,\Phi^{2d})$ は $\mathsf{V}^*\oplus\mathsf{V}$ の基底であり，$(E_1,\cdots,E_{2d})$ は $\mathsf{V}\oplus\mathsf{V}^*$ の基底)，J_d の (i,j) 成分 J_d^{ij} は，$J_{\mathsf{V}}\Phi^i = \sum_{j=1}^{2d} J_d^{ji}E_j$ から定まる (付録 B.2, B.2.2 項を参照).

$$\dot{Z}^{i+d}(t) = -\left.\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}\right|_{(x,p)=Z(t)}, \quad i=1,\cdots,d. \tag{3.61}$$

これを (3.59) の右辺に代入すれば 0 となる．したがって $dH(Z(t))/dt=0$ であるので，$H(Z(t))$ は t によらない定数である． ■

ハミルトン方程式 (3.57) の順序付けられた基底 $(\hat{e}_1,\cdots,\hat{e}_d,\hat{\phi}^1,\cdots,\hat{\phi}^d)$ に関する座標表示 (3.60), (3.61) を**ハミルトン方程式 (3.57) の正準形**と呼ぶ．これは，前節において，$H=H_L$ の場合に導出した方程式の組 (3.42), (3.43) の一般版に他ならない．

3.8 ハミルトン方程式の対称性

この節では，ハミルトン方程式 (3.57) の解空間

$$\mathfrak{S}_H := \{Z:\mathbb{I}\longrightarrow \mathsf{M_V} \,|\, Z \text{ は (3.57) を満たす}\} \tag{3.62}$$

の対称性について考察する．基本的な問いは，$Z(t)$ が (3.57) の解であるとき (i.e., $Z\in\mathfrak{S}_H$)，$\mathsf{M_V}$ 上のどのような変換 $S:\mathsf{M_V}\longrightarrow\mathsf{M_V}$ に対して $SZ(t)$ も (3.57) の解になるか (i.e., $SZ(\cdot)\in\mathfrak{S}_H$)，というものである．この問いに対する答えを記述するために，まず，ある準備を行う．

3.8.1 共役作用素

W,X をそれぞれ，有限次元実ベクトル空間とし，T を W から X への線形作用素とする：$T\in\mathsf{L}(\mathsf{W},\mathsf{X})$. $\phi\in\mathsf{X}^*$ に対して，写像 $\phi_T:\mathsf{W}\longrightarrow\mathbb{R}$ を

$$\phi_T(w) := \phi(Tw), \quad w\in\mathsf{W}$$

によって定義する．T と ϕ の線形性により ϕ_T も線形なので，$\phi_T\in\mathsf{W}^*$ である．そこで，写像 $T':\mathsf{X}^*\longrightarrow\mathsf{W}^*$ を

$$T'(\phi) := \phi_T, \quad \phi\in\mathsf{X}^* \tag{3.63}$$

によって定義する．ϕ_T の定義にもどって考えることにより，T' は線形であることが示される．このようにして構成される線形作用素 $T':\mathsf{X}^*\longrightarrow\mathsf{W}^*$ を T の**共役作用素**あるいは単に**共役**と呼ぶ．定義から

$$(T'\phi)(w) = \phi(Tw), \quad w\in\mathsf{W}, \phi\in\mathsf{X}^*. \tag{3.64}$$

線形作用素 $T:\mathsf{W}\longrightarrow\mathsf{X}$ の共役作用素 T' の基本的性質を見る前に，T の行

列表示と T' のそれとの関係を見ておく．いま，$\dim \mathsf{W} = n, \dim \mathsf{X} = m$ とし，$E := \{w_1, \cdots, w_n\}, F := \{f_1, \cdots, f_m\}$ をそれぞれ，W, X の基底とする．また，E, F の双対基底をそれぞれ，$E^* := \{\eta^i\}_{i=1}^n, F^* := \{\psi^j\}_{j=1}^m$ とする．基底 E, F に関する T の行列表示を $\widetilde{T} = (T_j^i)$ としよう：$Tw_i = \sum_{j=1}^m T_i^j f_j \ (i = 1, \cdots, n)$．このとき $(T'\psi^j)(w_i) = \psi^j(Tw_i) = \sum_{k=1}^m T_i^k \psi^j(f_k) = T_i^j \ (\because \psi^j(f_k) = \delta_k^j)$．一方，$T'$ の基底 F^*, E^* に関する行列表示を $\widetilde{T}' = ((T')_i^j)$ とすれば $T'\psi^j = \sum_{i=1}^n (T')_i^j \eta^i$．したがって，$(T'\psi^j)(w_i) = (T')_i^j$．ゆえに $(T')_i^j = T_i^j = ({}^{\mathrm{t}}\widetilde{T})_i^j$．よって

$$\widetilde{T'} = {}^{\mathrm{t}}\widetilde{T}. \tag{3.65}$$

すなわち，T' の行列表示は $\tilde{T}$ の転置行列で与えられる．

さて，共役作用素の基本的な性質を調べよう．

命題 3.13 $T, S \in \mathsf{L}(\mathsf{W}, \mathsf{X})$ とする．

(i) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，$(aT + bS)' = aT' + bS'$．

(ii) Y を有限次元実ベクトル空間とし，$R \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$ とする．このとき，$(RS)' = S'R'$ (積の順序に注意)．

(iii) T が単射ならば，T' は全単射であり，$(T^{-1})' = (T')^{-1}$ が成り立つ．

(iv) T' が単射ならば，T は全単射である．

証明 (i) (3.64) によって $((aT + bS)'\phi)(w) = \phi(aTw + bSw) = a\phi(Tw) + b\phi(Sw) = (aT'\phi)(w) + (bS'\phi)(w) \ (w \in \mathsf{W})$ による．

(ii) 任意の $w \in \mathsf{W}$ と $\phi \in \mathsf{Y}^*$ に対して，$((RS)'\phi)(w) = \phi(RSw) = (R'\phi)(Sw) = (S'(T'\phi))(w)$ による．

(iii) $\phi \in \ker T'$ とすれば，$T'\phi = 0$ より，$\phi(Tw) = 0 \ (\forall w \in \mathsf{W})$．$T$ は全射であるから，これは $\phi = 0$ を意味する．したがって，T' は単射である．いま，X^* は有限次元であるから，T' は全単射である．

任意の $w \in \mathsf{W}$ と $\psi \in \mathsf{W}^*$ に対して $(T'(T^{-1})'\psi)(w) = \psi(T^{-1}(Tw)) = \psi(w)$ であるから，$T'(T^{-1})' = I_{\mathsf{W}^*}$．同様に，$(T^{-1})'T' = I_{\mathsf{X}^*}$．したがって $(T')^{-1} = (T^{-1})'$．

(iv) $w \in \ker T$ とすれば，任意の $\phi \in \mathsf{X}^*$ に対して $\phi(Tw) = 0$．したがって，$(T'\phi)(w) = 0 \ (\forall \phi \in \mathsf{X}^*) \cdots (*)$．仮定により T' は単射であり，$\dim \mathsf{X}^* < \infty$ であるから，T' は全射である．したがって，$(*)$ は $w = 0$ を意味する．ゆえに T は単射であるから，全射でもある． ■

命題 3.14 $f:\mathsf{W}\longrightarrow\mathbb{R}$ を連続微分可能な関数とする．$T\in\mathsf{L}(\mathsf{W})$ は単射であるとする．このとき

$$(T')^{-1}(df)(w)=[d(f\circ T^{-1})](Tw),\quad w\in\mathsf{W}. \tag{3.66}$$

ただし，$f\circ T^{-1}:\mathsf{W}\longrightarrow\mathbb{R}$ は合成写像である：$(f\circ T^{-1})(w):=f(T^{-1}w)$ $(w\in\mathsf{W})$.

証明 $\phi\in\mathsf{W}^*, w\in\mathsf{W}$ を任意にとる．このとき，命題 3.13 (iii) によって，任意の $y\in\mathsf{W}$ に対して

$$\begin{aligned}[(T')^{-1}(df)(w)](y)=[(df)(w)](T^{-1}y)&=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(w+hT^{-1}y)-f(w)}{h}\\&=\frac{(f\circ T^{-1})(Tw+hy))-(f\circ T^{-1})(Tw)}{h}\\&=[d(f\circ T^{-1})(Tw)](y).\end{aligned}$$

したがって，$(T')^{-1}(df)(w)=[d(f\circ T^{-1})](Tw)$. ■

3.8.2 ハミルトン方程式の解空間の対称性

以上の準備のもとで，解空間 $\mathfrak{S}_H$ の持つ対称性について語ることができるが，なお，1 つの重要な事実を補題として証明しておかねばならない：

補題 3.15 線形作用素 $S\in\mathsf{L}(\mathsf{M_V})$ が

$$SJ_{\mathsf{V}}S'=J_{\mathsf{V}}. \tag{3.67}$$

を満たすならば，S および S' は全単射である．さらに

$$S^{-1}J_{\mathsf{V}}(S^{-1})'=J_{\mathsf{V}} \tag{3.68}$$

が成り立つ．

証明 命題 3.13 (iv) によって，S' が単射であること (したがって，全単射) を示せばよい．そこで，$S'\Phi=0$ $(\Phi\in\mathsf{M}_{\mathsf{V}}^*)$ とすれば $J_{\mathsf{V}}\Phi=0$. J_{V} は単射であるから，$\Phi=0$. ゆえに S' は単射である．

(3.67) の左から S^{-1} を，右から $(S')^{-1}$ を作用させ，$(S')^{-1}=(S^{-1})'$ (命題 3.13 (iii)) を用いると，(3.68) が得られる． ■

$\mathsf{M_V}$ 上の写像 f に対して，$\mathscr{M}(\mathbb{R},\mathsf{M_V})$ ($\mathbb{R}$ から $\mathsf{M_V}$ への写像の全体) 上の写像 $\hat{f}$: $\mathscr{M}(\mathbb{R},\mathsf{M_V})\longrightarrow\mathscr{M}(\mathbb{R},\mathsf{M_V}); Z\longmapsto\hat{f}(Z)$ ($Z\in\mathscr{M}(\mathbb{R},\mathsf{M_V})$ を

$$(\hat{f}(Z))(t):=f(Z(t)),\quad t\in\mathbb{R}$$

によって定義する．

この節のはじめに提起した問いに対する答えは，次の定理によって与えらる：

定理 3.16 $H:\mathsf{M}_\mathsf{V}\longrightarrow\mathbb{R}$ をハミルトン関数とし，(3.67) を満たす線形作用素 $S\in\mathsf{L}(\mathsf{M}_\mathsf{V})$ で $S(D\times\mathsf{V}^*)=D\times\mathsf{V}^*$ となるものを任意にとる．Z をハミルトン方程式 (3.57) の任意の解とする：$Z\in\mathfrak{S}_H$．このとき，次の (i), (ii) が成り立つ：

(i) $\hat{S}(Z)\in\mathfrak{S}_{H\circ S^{-1}}$．すなわち，$\hat{S}(Z)$ はハミルトニアンが $H\circ S^{-1}$ のハミルトン方程式の解である[*9]．

(ii)

$$H\circ S^{-1}=H \tag{3.69}$$

ならば，$\hat{S}(Z)$ は (3.57) の解である．特に

$$\hat{S}(\mathfrak{S}_H)=\mathfrak{S}_H. \tag{3.70}$$

証明 (i) $Z_S:=\hat{S}(Z)$ とおくと

$$\begin{aligned}\dot{Z}_S(t)&=SJ_\mathsf{V}dH(Z(t))=SJ_\mathsf{V}S'(S')^{-1}dH(Z(t))\\&=J_\mathsf{V}[d(H\circ S^{-1})](Z_S(t))\quad(\because (3.67)\ \text{と命題 3.14})\end{aligned}$$

これは，$Z_S\in\mathfrak{S}_{H\circ S^{-1}}$ を意味する．

(ii) (3.69) と (i) により，$\hat{S}(Z)\in\mathfrak{S}_H$．これは，$\hat{S}(\mathfrak{S}_H)\subset\mathfrak{S}_H\cdots(*)$ を意味する．補題 3.15 によって，S のかわりに S^{-1} を考えれば，$\widehat{S^{-1}}(\mathfrak{S}_H)\subset\mathfrak{S}_H\cdots(**)$ も成立することになる．容易にわかるように $\hat{S}\widehat{S^{-1}}=I$ なので，$(**)$ の両辺に $\hat{S}$ を作用させることにより，$\mathfrak{S}_H\subset\hat{S}(\mathfrak{S}_H)$ が導かれる．これと $(*)$ を合わせれば，(3.70) を得る． ■

定理 3.16 の意味を対称性の観点から考えよう．まず，(i) は，ハミルトニアン H から定まるハミルトン方程式の解 Z を $S\neq I$ で変換したもの $\hat{S}(Z)$ は，別のハミルトニアン $H\circ S^{-1}$ から定まるハミルトン方程式の解であることを語る．この性質を**変換 S に関するハミルトン方程式の共変性**と呼ぶ．

次に条件 (3.69) は，第1章，1.6 節で導入した術語を用いるならば，H が S 対称であるということである．この対称性が解空間の $\hat{S}$ 対称性 (3.70) を導くのである．

[*9] $(H\circ S^{-1})(x,p):=H(S^{-1}(x,p))\ ((x,p)\in D\times\mathsf{V}^*)$．

(3.67) を満たす線形作用素 S を M_V 上の**シンプレクティック変換**と呼ぶ．群論的な発想からいえば，この型の変換の全体

$$\mathrm{S_p}(\mathsf{M}_\mathsf{V}) := \{S \in \mathsf{L}(\mathsf{M}_\mathsf{V}) \mid SJ_\mathsf{V}S' = J_\mathsf{V}\} \tag{3.71}$$

を考えるのは自然である．この集合について次の定理が成り立つ．

定理 3.17 $\mathrm{S_p}(\mathsf{M}_\mathsf{V})$ は M_V 上の変換群である．

証明 補題 3.15 によって S は全単射であり，$S^{-1} \in \mathrm{S_p}(\mathsf{M}_\mathsf{V})$．また，$S, T \in \mathrm{S_p}(\mathsf{M}_\mathsf{V})$ ならば，命題 3.13 (ii) を用いることにより $(ST)J_\mathsf{V}(ST)' = STJ_\mathsf{V}T'S' = SJ_\mathsf{V}S' = J_\mathsf{V}$．したがって，$ST \in \mathrm{S_p}(\mathsf{M}_\mathsf{V})$． ■

変換群 $\mathrm{S_p}(\mathsf{M}_\mathsf{V})$ を M_V 上の**シンプレクティック変換群**と呼ぶ．

こうして，定理 3.16 はシンプレクティック変換群に関するハミルトン方程式の対称性を表すことがわかる．

次の事実も注目に値する：

命題 3.18 $S \in \mathsf{L}(\mathsf{M}_\mathsf{V})$ がシンプレクティック変換であるための必要十分条件は

$$S'J_\mathsf{V}^{-1}S = J_\mathsf{V}^{-1} \tag{3.72}$$

が成り立つことである．

証明 (必要性) S はシンプレクティック変換であるとする．(3.67) によって，$(SJ_\mathsf{V})(S'J_\mathsf{V}^{-1}) = I_{\mathsf{M}_\mathsf{V}}$．したがって，$(SJ_\mathsf{V})^{-1} = S'J_\mathsf{V}^{-1}$．左辺は $J_\mathsf{V}^{-1}S^{-1}$ に等しいから，$S'J_\mathsf{V}^{-1} = J_\mathsf{V}^{-1}S^{-1}$．右から S を作用させれば，(3.72) が得られる．

(十分性) 必要性の証明の逆を辿ればよい． ■

例 3.19 $T \in \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ とし，$S_T : \mathsf{M}_\mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{M}_\mathsf{V}$ を

$$S_T(x,p) := (T^{-1}x, T'p), \quad (x,p) \in \mathsf{M}_\mathsf{V}$$

によって定義する．このとき，S_T はシンプレクティック変換である．実際，$S_T'(\phi,u) = ((T')^{-1}\phi, Tu), (\phi,u) \in \mathsf{M}_\mathsf{V}^*$ であるから

$$(S_TJ_\mathsf{V}S_T')(\phi,u) = S_T(Tu, -(T')^{-1}\phi) = (u,-\phi) = J_\mathsf{V}(\phi,u).$$

したがって，$S_TJ_\mathsf{V}S_T' = J_\mathsf{V}$.

例 3.20 $\mathsf{V} \oplus \mathsf{V}^*$ の順序付けられた基底 $\mathscr{E} := (\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_d, \hat{\phi}^1, \cdots, \hat{\phi}^d)$ ($\mathsf{V}^* \oplus \mathsf{V}$ の基底として $\mathscr{F} := (\tilde{\phi}^1, \cdots, \tilde{\phi}^d, \tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_d)$ をとる) に関する J_V の行列表示は J_d であった．基底 $\mathscr{E}$ に関する $S \in \mathrm{S_p}(\mathsf{M}_\mathsf{V})$ の行列表示を $\widetilde{S} := (S_j^i)$ とすれば，S' の基底 $\mathscr{F}$ に関

する行列表示 $\widetilde{S}'$ は $\widetilde{S}$ の転置行列 ${}^{\mathrm{t}}\widetilde{S}$ で与えられる[*10]．したがって，行列表示では，S がシンプレクティック変換であることは (3.67) によって

$$ {}^{\mathrm{t}}\widetilde{S}' J_d \widetilde{S}' = J_d \tag{3.73}$$

と同値である．

一般に，$2d$ 次の実行列 A に関して

$$ {}^{\mathrm{t}}A J_d A = J_d \tag{3.74}$$

が成り立つとき，A を $2d$ 次の**シンプレクティック行列**と呼ぶ．

シンプレクティック群の場合と同様にして，$2d$ 次のシンプレクティック行列の全体

$$\mathrm{S_p}(d) := \{A \in \mathrm{GL}(2d,\mathbb{R}) \mid A \text{ は } 2d \text{ 次のシンプレクティック行列}\} \tag{3.75}$$

は群をなすことがわかる．この群を d 次の**シンプレクティック群**と呼ぶ．

写像 $\rho : \mathrm{S_p}(\mathsf{M_V}) \longrightarrow \mathrm{S_p}(d)$ を $\rho(S) := \widetilde{S}'$ $(S \in \mathrm{S_p}(\mathsf{M_V}))$ によって定義すれば，これは群の同型写像であることがわかる．

3.8.3 シンプレクティック形式

条件 (3.67) と同値な数学的形式を求めることを考える．J_{V}^{-1} は $\mathsf{M_V}$ から $\mathsf{M_V^*}$ への線形写像であるから，写像 $\omega_{\mathsf{V}} : \mathsf{M_V} \times \mathsf{M_V} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\omega_{\mathsf{V}}(\xi,\eta) := (J_{\mathsf{V}}^{-1}\xi)(\eta), \quad \xi,\eta \in \mathsf{M_V} \tag{3.76}$$

— $J_{\mathsf{V}}^{-1}\xi \in \mathsf{M_V^*}$ に注意 — によって定義できる．この写像について，次の事実が証明される：

命題 3.21 ω_{V} は (3.76) によって定義されるものとする．

(ω.1) (双線形性)

$$\omega_{\mathsf{V}}(a\xi_1 + b\xi_2, \eta) = a\omega_{\mathsf{V}}(\xi_1,\eta) + b\omega_{\mathsf{V}}(\xi_2,\eta),$$

$$\omega_{\mathsf{V}}(\eta, a\xi_1 + b\xi_2) = a\omega_{\mathsf{V}}(\eta,\xi_1) + b\omega_{\mathsf{V}}(\eta,\xi_2), \quad a,b \in \mathbb{R}, \xi,\eta \in \mathsf{M_V}.$$

(ω.2) (反対称性) $\omega_{\mathsf{V}}(\xi,\eta) = -\omega_{\mathsf{V}}(\eta,\xi)$ $(\xi,\eta \in \mathsf{M_V})$.

(ω.3) (非退化性) ベクトル $\eta \in \mathsf{M_V}$ が，すべての $\xi \in \mathsf{M_V}$ に対して $\omega_{\mathsf{V}}(\xi,\eta) = 0$ を満たすならば，$\eta = 0$.

[*10] (3.65) を参照．

証明 (i) これは，$J_{\mathsf{V}}^{-1}\in \mathsf{L}(\mathsf{M}_{\mathsf{V}},\mathsf{M}_{\mathsf{V}}^{*})$ と $J_{\mathsf{V}}^{-1}\xi\in \mathsf{M}_{\mathsf{V}}^{*}$ の線形性による．

(ii) $\xi=(x,p),\eta=(u,\phi)$ とすれば，$J_{\mathsf{V}}^{-1}\xi=(-p,x)$ であるから

$$\omega_{\mathsf{V}}((x,p),(u,\phi))=-p(u)+\phi(x),\quad x,u\in \mathsf{V},p,\phi\in \mathsf{V}^{*}. \tag{3.77}$$

これは，$\omega_{\mathsf{V}}((u,\phi),(x,p))=-\omega_{\mathsf{V}}((x,p),(u,\phi))$ を意味する．

(iii) $\omega_{\mathsf{V}}(\xi,\eta)=0$ $(\forall\xi\in \mathsf{M}_{\mathsf{V}})$ とし，$\xi=(x,p),\eta=(u,\phi)$ とする．(3.77) より $-p(u)+\phi(x)=0$. $x=0$ とすれば，$p(u)=0$ $(\forall p\in \mathsf{V}^{*})$ であるから $u=0$. したがって $\phi(x)=0$ $(\forall x\in \mathsf{V})$. したがって $\phi=0$. ゆえに $\eta=0$. ■

次の命題は，M_{V} 上のシンプレクティック変換の，写像 ω_{V} を用いた特徴付けを与える．

命題 3.22 S が M_{V} 上のシンプレクティック変換であるための必要十分条件は

$$\omega_{\mathsf{V}}(S\xi,S\eta)=\omega_{\mathsf{V}}(\xi,\eta),\quad \xi,\eta\in \mathsf{M}_{\mathsf{V}} \tag{3.78}$$

が成り立つことである．

証明 (必要性) S をシンプレクティック変換とする．このとき，(3.78) の左辺 $=(J_{\mathsf{V}}^{-1}S\xi)(S\eta)=((S^{-1})'J_{\mathsf{V}}^{-1}\xi)(S\eta)=(J_{\mathsf{V}}^{-1}\xi)(S^{-1}S\eta)=$(3.78) の右辺．

(十分性) (3.78) が成り立つとしよう．まず，S が全単射であることを示す．$\xi\in\ker S$ とすれば，$S\xi=0$. (3.78) より，$\omega_{\mathsf{V}}(\xi,\eta)=0$ $(\forall\eta\in \mathsf{M}_{\mathsf{V}})$. これと ω_{V} の非退化性 (ω.3) により，$\xi=0$. したがって，S は単射である．M_{V} は有限次元であるから，これは S が全単射であることを意味する．したがって，(3.78) は $\omega_{\mathsf{V}}(\xi,\eta)=\omega_{\mathsf{V}}(S^{-1}\xi,S^{-1}\eta)$ $(\xi,\eta\in \mathsf{M}_{\mathsf{V}})$ と同値である．これと ω_{V} の定義により $(J_{\mathsf{V}}^{-1}\xi)(\eta)=(J_{\mathsf{V}}^{-1}S^{-1}\xi)(S^{-1}\eta)$. 右辺は $((S')^{-1}J_{\mathsf{V}}^{-1}S^{-1}\xi)(\eta)$ に等しく，$\eta\in \mathsf{M}_{\mathsf{V}}$ は任意であるから，$J_{\mathsf{V}}^{-1}\xi=(S')^{-1}J_{\mathsf{V}}^{-1}S^{-1}\xi$. $\xi\in \mathsf{M}_{\mathsf{V}}$ も任意であるから，$J_{\mathsf{V}}^{-1}=(S')^{-1}J_{\mathsf{V}}^{-1}S^{-1}$. これは (3.72) を意味する． ■

式 (3.78) を満たす変換 S は ω_{V} を不変にするという．こうして，M_{V} 上のシンプレクティック変換は ω_{V} を不変にする変換として特徴づけられる．これも一種の対称性である．

一般に，有限次元の実ベクトル空間 W の直積空間 $\mathsf{W}\times\mathsf{W}$ から $\mathbb{R}$ への写像 ω: $\mathsf{W}\times\mathsf{W}\longrightarrow\mathbb{R}$ が双線形性，反対称性，非退化性 ($\omega_{\mathsf{V}},\mathsf{M}_{\mathsf{V}}$ をそれぞれ ω,W で置き換えた場合の性質 (ω.1)～(ω.3)) を有するとき，ω を W 上の**シンプレクティック形式**と呼ぶ．

ω_{V} は M_{V} 上のシンプレクティック形式の一例なのである．

第3章の演習問題

Vはd次元ユークリッドベクトル空間とし，$D\subset \mathsf{V}$を開集合とする．

1. $H:D\times\mathsf{V}^*\longrightarrow\mathbb{R}$をハミルトン関数とし，定数$a>0, b\geq 0, q>0$があって

$$H(x,p)\geq a(\|x\|+\|p\|)^q-b,\quad (x,p)\in D\times\mathsf{V}^*$$

が成り立つとする．ZをHから定まるハミルトン方程式の解とする．このとき，$\sup_{t\in\mathbb{I}}\|Z(t)\|<\infty$を示せ．

2. $H:\mathsf{V}\times\mathsf{V}^*\longrightarrow\mathbb{R}$をハミルトン関数とする．任意の$(x,p)\in\mathsf{V}\times\mathsf{V}^*$に対して，$Z(0)=(x,p)$となるハミルトン方程式の解は唯ひとつ存在するとし，これを$g_t(x,p)$と書く．

(i) すべての$t,s\in\mathbb{R}$に対して，$g_{t+s}=g_tg_s$を示せ．

(ii) $\mathsf{T}_H:=\{g_t|t\in\mathbb{R}\}$は$\mathsf{V}\times\mathsf{V}^*$上の1パラメータ変換群であることを示せ．

(iii) 各$(x,p)\in\mathsf{V}\times\mathsf{V}^*$に対して，曲線$Z_{(x,p)}$を$Z_{(x,p)}(t):=g_t(x,p)$によって定義する．このとき，$(x,p)\neq(x',p')$ならば，任意の$t\in\mathbb{R}$に対して$Z_{(x,p)}(t)\neq Z_{(x',p')}(t)$を示せ．

注　変換群$\{g_t|t\in\mathbb{R}\}$はハミルトニアンHに付随する**ハミルトン相流**と呼ばれる．曲線$Z_{(x,p)}$を点(x,p)を通る**流線**という．

3. H, g_tを前問のものとし，Fを$\mathsf{V}\times\mathsf{V}^*$上の連続微分可能な実数値関数とする．写像$\{F,H\}:\mathsf{V}\times\mathsf{V}^*\longrightarrow\mathbb{R}$を

$$\{F,H\}(x,p):=\left.\frac{d}{dt}F(g_t(x,p))\right|_{t=0}$$

によって定義する．

(i) $\dfrac{d}{dt}F(g_t(x,p))=\{F,H\}(g_t(x,p))$を示せ．

(ii) $\{F,H\}=0$ならば，Fはハミルトン方程式の保存量であることを示せ．

(iii) $g_t(x,p)=(x,p)+J_{\mathsf{V}}((dH)(x,p))t+o(t)\ (t\longrightarrow 0)$を示せ．

注　関数$\{F,H\}$はFとHの**ポアソン括弧**と呼ばれる．

4. $F,H:\mathsf{V}\oplus\mathsf{V}^*\longrightarrow\mathbb{R}$を連続微分可能な関数とする．

(i) $\{F,H\}(x,p)=(dF)(x,p)(J_{\mathsf{V}}((dH)(x,p)))$を示せ．なお，右辺はスカラー場$F:\mathsf{V}\oplus\mathsf{V}^*\longrightarrow\mathbb{R}$の点$(x,p)$での微分$(dF)(x,p):\mathsf{V}\oplus\mathsf{V}^*\longrightarrow\mathbb{R}$のベクトル$J_{\mathsf{V}}((dH)(x,p))$における値を表す．

(ii) (i) を用いて，$\mathsf{V}\oplus\mathsf{V}^*$ の基底 $(\hat{e}_1,\cdots,\hat{e}_d,\hat{\phi}^1,\cdots,\phi^d)$ に関する座標表示において

$$\{F,H\}(x,p)=\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial F(x,p)}{\partial x^i}\frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i}-\frac{\partial F(x,p)}{\partial p_i}\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}\right)$$

であることを示せ．

(iii) 次の関係式を示せ ($F_1, F_2, G:\mathsf{V}\oplus\mathsf{V}^*\longrightarrow\mathbb{R}$ はいずれも連続微分可能)．

$$\{F,H\}=-\{H,F\}, \qquad \text{(反対称性)}$$

$$\{aF_1+bF_2,H\}=a\{F_1,H\}+b\{F_2,H\}, \quad a,b\in\mathbb{R}, \qquad \text{(線形性)}$$

$$\{\{F,G\},H\}+\{\{G,H\},F\}+\{\{H,F\},G\}=0. \qquad \text{(ヤコビ恒等式)}$$

(iv) 問題 2 の仮定のもとで F,G がハミルトン方程式の保存量であれば，$\{F,G\}$ もそうであることを示せ．

注　(iii) によって，$\mathsf{V}\oplus\mathsf{V}^*$ 上の実数値無限回微分可能な関数の空間は，ポアソン括弧をリー括弧積として，実リー代数をなすことがわかる．

第4章

特殊相対性理論

4.1 はじめに — 背景

前章までに論述した力学の理論は，もっぱら，質点の運動を記述するものである．こうした運動の領域に加えて，物理現象の重要な範疇の1つとして，電気と磁気が関わる現象領域 — 電磁現象の領域 — がある．この現象領域を原理的・統一的に記述する理論体系は，歴史的な紆余曲折を経て，19世紀の後半に確立され，今日では，**古典電磁気学**と呼ばれている．この学における基本的な物理量は**電場** — 電気を帯びた物体 (荷電物体) に働く力の場 — と**磁場** — 磁石や運動する荷電物体に働く力の場 — であり，それらを統一する実体としての**電磁場**である．

古典電磁気学における基本的な運動の範疇の1つは，電場や磁場の中における荷電物体の運動である．この場合の運動方程式は，ニュートンの運動方程式と電磁場の基礎方程式である**マクスウェル方程式**からなる連立方程式によって与えられる*[1]．だが，じつは，この組合せは，純理論的な観点からは，“十分には” 調和的でない．というのも古典電磁気学に現れている普遍的な理念を探求していくと，電磁現象が展開される時空は，ニュートン力学的時空とは異なるものであることが見出されるからである．したがって，古典電磁気学をより根源的な理念と見るならば，ニュートン力学は，古典電磁気学がよって立つ時空上での力学理論へと修正ないし拡張されねばならない．こうして得られる自然な力学理論が，アインシュタインによって打ち立てられた**特殊相対性理論**である*[2]．

---

*[1]マクスウェル方程式については，本書の第5章でとりあげる．

*[2]特殊相対論ともいう．ここに素描された構造の詳細については，拙著『物理現象の数学的諸原理』(共立出版，2003) の 7.8 節を参照.

4.2 ミンコフスキー時空

前節で言及した電磁現象の基盤となる時空概念は，4 次元のミンコフスキー空間，すなわち，4 次元ミンコフスキーベクトル空間を基準ベクトル空間とする計量アファイン空間である[*3]．ニュートン力学の場合と同様，より一般的に考察するために，時空として，$(d+1)$ 次元のミンコフスキー空間 $\mathbb{M}^{d+1}$ をとり $(d\in\mathbb{N})$ — これを $(d+1)$ 次元**ミンコフスキー時空**と呼ぶ —，その基準ベクトル空間である $(d+1)$ 次元ミンコフスキーベクトル空間を V_{M} とする．V_{M} の計量 — 以下，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ と記す — を**ミンコフスキー計量**と呼ぶ．この計量は不定計量であることに注意しよう (付録 C, 定義 C.9 (ii) を参照)．特殊相対性理論の文脈では，ミンコフスキー時空 $\mathbb{M}^{d+1}$ の点を**世界点**または**事象**という．

ニュートン力学的時空の場合と同様に，時空 $\mathbb{M}^{d+1}$ の中に任意に 1 点をとり，この点を始点とする位置ベクトルの全体を V_{M} と同一視することにより，$\mathbb{M}^{d+1}$ の点は V_{M} のベクトルによって記述される．

4.2.1 ローレンツ座標系

ミンコフスキー空間に関わる諸問題において計算を行う上で便利な線形座標系のクラスの 1 つを導入する．$E:=\{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ を V_{M} の任意のローレンツ基底とする．すなわち，$\{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ は計量的条件

$$\langle e_\mu, e_\nu\rangle = \eta_{\mu\nu}, \quad \mu,\nu=0,1,\cdots,d. \tag{4.1}$$

を満たす V_{M} の基底である．ただし，$\eta_{\mu\nu}$ は次のように定義される：

$$\eta_{00}=1, \quad \eta_{ii}=-1, \quad i=1,\cdots,d, \tag{4.2}$$

$$\eta_{\mu\nu}=0, \quad \mu\neq\nu. \tag{4.3}$$

V_{M} と E の組 (V_{M},E) を**ローレンツ座標系**と呼ぶ[*4]．ローレンツ座標系は無数に存在する．実際，次の定理が成り立つ．

定理 4.1 $L=(L^\mu_\nu)_{\mu,\nu=0,1,\cdots,d}$ を $(d+1)$ 次の実行列とし，ベクトル $f_\mu\in V_{\mathrm{M}}$ を

$$f_\mu := \sum_{\nu=0}^d L_\mu^\nu e_\nu \tag{4.4}$$

[*3] 以下，ベクトル空間やアファイン空間に関する術語については，付録 B, C を参照．

[*4] 通常の物理の教科書では，ローレンツ座標系のことを (相対論的)“慣性座標系” または単に “慣性系” と呼ぶ．

によって定義する．(μ,ν) 成分が $\eta_{\mu\nu}$ である $(d+1)$ 次の正方行列を η とする：

$$\eta := (\eta_{\mu\nu}). \tag{4.5}$$

このとき，$\{f_\mu\}_{\mu=0}^d$ がローレンツ基底であるための必要十分条件は行列 L が

$$^{\mathrm{t}}L\eta L = \eta \tag{4.6}$$

を満たすことである．

証明 まず，$\langle f_\mu, f_\nu\rangle = \sum_{\alpha,\beta=0}^{d} L_\mu^\alpha L_\nu^\beta \langle e_\alpha, e_\beta\rangle = L_\mu^\alpha L_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta}$ であるから

$$\langle f_\mu, f_\nu\rangle = ({}^{\mathrm{t}}L\eta L)_{\mu\nu} \tag{4.7}$$

が成り立つことに注意する．

(必要性) $\{f_\mu\}_{\mu=0}^d$ がローレンツ基底であるとしよう．したがって，$\langle f_\mu, f_\nu\rangle = \eta_{\mu\nu}$. これと (4.7) は (4.6) を意味する．

(十分性) (4.6) が成り立てば，(4.7) によって $\langle f_\mu, f_\nu\rangle = \eta_{\mu\nu}$. したがって，$(f_\mu)_\mu$ はローレンツ基底である． ■

(4.6) を満たす行列 L を**ローレンツ行列**と呼ぶ[*5]．

4.2.2 ローレンツ群

次の定理はローレンツ行列の基本的な性質をまとめたものである：

定理 4.2 (i) 任意のローレンツ行列 L は $\mathrm{GL}(d+1,\mathbb{R})$ の元であり

$$(\det L)^2 = 1 \tag{4.8}$$

が成り立つ．

(ii) 任意のローレンツ行列 L に対して，L^{-1} および ${}^{\mathrm{t}}L$ もローレンツ行列である．

(iii) ローレンツ行列の全体

$$\mathscr{L}(d+1) := \{L \in \mathsf{M}_{d+1}(\mathbb{R}) \,|\, L \text{ はローレンツ行列}\} \tag{4.9}$$

は $\mathrm{GL}(d+1,\mathbb{R})$ の部分群である．

証明 (i) (4.6) の両辺の行列式をとり，転置行列の行列式はもとの行列の行列式に等しいことを使えば，$(\det L)^2 \det\eta = \det\eta$ を得る．$\det\eta = (-1)^d \neq 0$ であるか

*5 ここで導入した「ローレンツ行列」は標準的な術語ではなく，筆者の発案になるものである．

ら (4.8) が成立する．したがって，$\det L \neq 0$ であるから，L は正則である．ゆえに $L \in \mathrm{GL}(d+1,\mathbb{R})$.

(ii) (4.6) の両辺に，左から $({}^{\mathrm{t}}L)^{-1}$ を，右から L^{-1} を作用させ，任意の正則行列 S に対して成り立つ式 $({}^{\mathrm{t}}S)^{-1} = {}^{\mathrm{t}}(S^{-1})$ (証明は容易) を用いると，${}^{\mathrm{t}}(L^{-1})\eta L^{-1} = \eta$ を得る．したがって，L^{-1} はローレンツ行列である．

$\eta^2 = I_{d+1}$ であるから，(4.6) は ${}^{\mathrm{t}}L(\eta L\eta) = I_{d+1}$ を意味する．したがって，${}^{\mathrm{t}}L = (\eta L\eta)^{-1} = \eta L^{-1}\eta$. ゆえに $L\eta{}^{\mathrm{t}}L = \eta$.

(iii) $L, M \in \mathscr{L}(d+1)$ に対して，${}^{\mathrm{t}}(LM)\eta(LM) = {}^{\mathrm{t}}M{}^{\mathrm{t}}L\eta LM = {}^{\mathrm{t}}M\eta M = \eta$. したがって，$LM \in \mathscr{L}(d+1)$. また，(i) より，$L^{-1} \in \mathscr{L}(d+1)$. ゆえに $\mathscr{L}(d+1)$ は $\mathrm{GL}(d+1,\mathbb{R})$ の部分群である． ■

群 $\mathscr{L}(d+1)$ を**ローレンツ群**と呼ぶ．

(4.8) により，任意の $L \in \mathscr{L}(d+1)$ に対して $\det L = 1$ または $\det L = -1$ が成り立つ．そこで

$$\mathscr{L}_+(d+1) := \{L \in \mathscr{L}(d+1) \mid \det L = 1\} \tag{4.10}$$

を考えると，これはローレンツ群 $\mathscr{L}(d+1)$ の部分群になることがわかる．

L をローレンツ行列としよう．(4.6) の両辺の (0,0) 成分をとることにより

$$(L_0^0)^2 = \sum_{j=1}^{d} (L_0^j)^2 + 1 \tag{4.11}$$

が見出される．したがって

$$(L_0^0)^2 \geq 1. \tag{4.12}$$

ゆえに，$L_0^0 \geq 1$ または $L_0^0 \leq -1$. そこで，$\mathscr{L}_+(d+1)$ の部分集合

$$\mathscr{L}_+^{\uparrow}(d+1) := \{L \in \mathscr{L}(d+1) \mid \det L = 1, L_0^0 \geq 1\} \tag{4.13}$$

を考えてみる．これに関して，次の定理が成り立つ：

定理 4.3 $\mathscr{L}_+^{\uparrow}(d+1)$ はローレンツ群の部分群である．

証明 $L, M \in \mathscr{L}(d+1)$ とすれば，$(LM)_0^0 = L_0^0 M_0^0 + \sum_{j=1}^{d} L_j^0 M_0^j$. コーシー–シュヴァルツの不等式により

$$\left|\sum_{j=1}^{d} L_j^0 M_0^j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (L_j^0)^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{d} (M_0^j)^2}.$$

(4.11) を M に応用すれば，$\sqrt{\sum_{j=1}^{d}(M_0^j)^2}=\sqrt{(M_0^0)^2-1}$. 定理 4.2 (ii) によって，ローレンツ行列の転置行列もローレンツ行列であるから，(4.11) により

$$(L_0^0)^2=\sum_{j=1}^{d}(L_j^0)^2+1, \quad L\in\mathscr{L}(d+1) \tag{4.14}$$

が成り立つ．したがって，$\sqrt{\sum_{j=1}^{d}(L_j^0)^2}=\sqrt{(L_0^0)^2-1}$. ゆえに

$$(LM)_0^0\geq L_0^0M_0^0-\sqrt{(L_0^0)^2-1}\sqrt{(M_0^0)^2-1}. \tag{4.15}$$

これは，任意のローレンツ行列 L,M に対して成立する式である．

さて，$L,M\in\mathscr{L}_+^{\uparrow}(d+1)$ とすれば，$L_0^0\geq 1, M_0^0\geq 1$. そこで，容易に証明できる不等式

$$ab\geq\sqrt{a^2-1}\sqrt{b^2-1}+1, \quad a\geq 1, b\geq 1 \tag{4.16}$$

を応用すれば，(4.15) から $(LM)_0^0\geq 1$ が導かれる．よって，$LM\in\mathscr{L}_+^{\uparrow}(d+1)$.

次に $L\in\mathscr{L}_+^{\uparrow}(d+1)$ とし，$L^{-1}=K$ とおく．$LK=I_{d+1}$ であるから

$$\begin{aligned}1=L_0^0K_0^0+\sum_{j=1}^{d}L_j^0K_0^j&\leq L_0^0K_0^0+\sqrt{\sum_{j=1}^{d}(L_j^0)^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{d}(K_0^j)^2}\\&=L_0^0K_0^0+\sqrt{(L_0^0)^2-1}\sqrt{(K_0^0)^2-1}.\end{aligned}$$

この不等式と (4.16) から，もし $K_0^0\leq -1$ とすると矛盾が出ることがわかる．したがって，$K_0^0\geq 1$. ゆえに $L^{-1}\in\mathscr{L}_+^{\uparrow}(d+1)$. 以上から題意が成立する． ■

部分群 $\mathscr{L}_+^{\uparrow}(d+1)$ を**固有ローレンツ群**と呼ぶ.

4.2.3 時間と空間の発現

ローレンツ基底 E を用いて，ベクトル $x\in V_{\mathrm{M}}$ を

$$x=\sum_{\mu=0}^{d}x^{\mu}e_{\mu} \tag{4.17}$$

と展開する．展開係数の組 $(x^0,x^1,\cdots,x^d)\in\mathbb{R}^{d+1}$ はローレンツ座標系 (V_{M},E) における x の座標表示である．(4.1) によって

$$\langle x,x\rangle=(x^0)^2-\sum_{j=1}^{d}(x^j)^2. \tag{4.18}$$

これは，すなわち，x の計量をその成分を用いて表した式である．

(4.18) から，任意の点 $y=\sum_{\mu=0}^{d} y^\mu e_\mu \in V_{\rm M}$ と x の間の計量 $\langle x-y, x-y\rangle$ は

$$\langle x-y, x-y\rangle = (x^0-y^0)^2 - \sum_{j=1}^{d}(x^j-y^j)^2 \tag{4.19}$$

によって与えられることがわかる ($x-y=\sum_{\mu=0}^{d}(x^\mu-y^\mu)e_\mu$ に注意し，(4.18) の x として $x-y$ をとればよい)．$x, y\in V_{\rm M}$ は任意であるから，(4.19) は，ミンコフスキー空間の 2 点間の計量をローレンツ座標系 $(V_{\rm M}, E)$ の座標を用いて表す式である．したがって，別のローレンツ座標系 $(V_{\rm M}, E')$ $(E=\{e'_\mu\}_{\mu=0}^d)$ での x, y の座標表示をそれぞれ，$(x^{\mu\prime}), (y^{\mu\prime})$ とすれば

$$(x^0-y^0)^2 - \sum_{j=1}^{d}(x^j-y^j)^2 = (x^{0\prime}-y^{0\prime})^2 - \sum_{j=1}^{d}(x^{j\prime}-y^{j\prime})^2 \tag{4.20}$$

が成り立つことになる．念のために注意しておけば，これは，$\langle x-y, x-y\rangle$ という座標によらない 1 つの絶対的な量を異なるローレンツ座標系で表した式が等しい，という自明のことをいっているにすぎないということである[*6]．

(4.17) の各辺とベクトル e_ν の計量を考えると $\langle e_\nu, x\rangle = \sum_{\mu=0}^{d}\eta_{\nu\mu}x^\mu$．これは，$\tilde{x}=(x^0, x^1, \cdots, x^d)\in\mathbb{R}^{1+d}$ とすれば，$\eta\tilde{x}=(\langle e_0,x\rangle, \langle e_1,x\rangle, \cdots, \langle e_d,x\rangle)$ を意味する．したがって，$\tilde{x}=\eta^{-1}(\langle e_0,x\rangle, \langle e_1,x\rangle, \cdots, \langle e_d,x\rangle)$．そこで

$$\eta^{-1}=(\eta^{\mu\nu}) \tag{4.21}$$

と表すことにすれば

$$x^\mu = \sum_{\nu=0}^{d}\eta^{\mu\nu}\langle e_\nu, x\rangle \tag{4.22}$$

が成り立つ．これがローレンツ基底 $\{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ に関する，x の各成分を計量を用いて表す式である．容易にわかるように $\eta^2=I_{d+1}$ であるから，$\eta^{-1}=\eta$．したがって

$$\eta^{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}, \quad \mu,\nu=0,1,\cdots,d \tag{4.23}$$

である．

ベクトル x の成分表示 $(x^0, x^1, \cdots, x^d)$ の物理的解釈を行うために，いま，$V_{\rm M}$ は時空を表すと仮定しよう[*7]．このとき，x は時空の中の点を表す位置ベクトルであ

[*6] わざわざこのような注をしなければならないのは，物理学の教科書の中には，(4.20) が何か本質的な意味があるかのごとく述べているものがあるからである．

[*7] これまでの議論では，$V_{\rm M}$ に対する物理的解釈は必要ではない．

る．そこで，各成分 x^μ は長さの次元を持つとする．$(x^0,x^1,\cdots,x^d)$ が時空の座標表示であるからには，その中のどれか 1 つの成分は時刻と関係があるはずである．基底 E を構成するベクトルの計量の符号を考慮すると，e_0 の係数 x^0 がそれであるとするのが自然である．そこで，x^0 から時間の次元を持つ量をつくることを考える．簡単な次元解析により，そのような量は，x^0 を速さの次元 $[L]/[T]$ ($[L]$ は長さの次元，$[T]$ は時間の次元を表す) を持つ量で割ることによって得られることがわかる．ところで，速さの次元を持つ物理定数として，真空中の光の速さ c がある[*8]．そこで，c はローレンツ座標系の取り方によらない量であると仮定し ― これを**光速度不変の原理**という ―，$t=x^0/c$ によって新しい変数 t を導入すれば，これがまさに時刻を表すと解釈されるのである．残りの成分 $(x^1,\cdots,x^d)$ は $\mathbb{R}^d$ の元であるので，空間座標を表すものと解釈できる．そこで，t または x^0 を x の**時間成分**といい

$$\boldsymbol{x}:=(x^1,\cdots,x^d) \tag{4.24}$$

を x の**空間成分**と呼ぶ．こうして，ローレンツ座標系を設定することにより，時間と空間の座標として解釈される対象が現れる：

$$x=cte_0+\sum_{i=1}^{d}x^ie_i. \tag{4.25}$$

しかし，ここで注意しなければならないことは，線形座標系は基底の取り方に依存するので，時間，空間はローレンツ基底の取り方に依存する相対的なものだということである．実際，別のローレンツ基底 $E'=\{e_\mu{}'\}_{\mu=0}^{d}$ に関するローレンツ座標系 (V_{M},E') においては

$$x=\sum_{\mu=0}^{d}x^{\mu\prime}e'_\mu \tag{4.26}$$

と展開される $(x^{\mu\prime}\in\mathbb{R})$．底変換：$E\longmapsto E'$ の行列を $L=(L^\mu_\nu)$ とすれば，すでに見たように，これはローレンツ行列であり

$$x^{\mu\prime}=\sum_{\nu=0}^{d}(L^{-1})^\mu_\nu x^\nu \tag{4.27}$$

が成り立つ[*9]．これを時間成分と空間成分に分けて書けば次のようになる ($t'=x^{0\prime}/c$ とする)：

[*8] $c\fallingdotseq 30$ 万 km/s.

[*9] 付録 B, B.1.2 項を参照.

$$t' = (L^{-1})^0_{\ 0} t + \sum_{j=1}^{d} (L^{-1})^0_{\ j} \frac{x^j}{c}, \tag{4.28}$$

$$x^{i'} = (L^{-1})^i_{\ 0} ct + \sum_{j=1}^{d} (L^{-1})^i_{\ j} x^j, \quad i = 1, \cdots, d. \tag{4.29}$$

これを見ると，新座標 $(ct', x^{1'}, \cdots, x^{d'})$ において，旧座標 $(ct, x^1, \cdots, x^d)$ の時間と空間座標が一般には混合する形になることがわかる．この意味で，時間と空間は独立ではない．これはニュートン力学的時空との大きな違いである[*10]．

注意 4.4 (哲学的な注釈) 時間と空間が独立でないというのは，特殊相対性理論の革命的な内容の 1 つである．しかし，座標から自由な本書の定式化からいえば，そもそも "原初" には時間も空間もないのであって，特殊相対論が関わる現象の根底に在るのはミンコフスキー空間の "点" であり，これはそれ自体としては物理的解釈を許さない絶対的・純粋存在である．ローレンツ座標系を設定することにより，初めて，私たちが "時間" ないし "空間" と呼ぶものが立ち現れてくるのである．だが，この意味での時間と空間は，その相対性からいって，真に実在的なものではない．

注意 4.5 物理学の文献では，通常，ミンコフスキーベクトル空間として $(\mathbb{R}^{3+1}, g_{\mathrm{M}})$ (付録 C, 例 C.5) をとり，しかも座標表示を用いて議論を展開する．そのため，座標変換と写像の区別が明確でなく，しばしば，誤解や混乱が見られる．物理学の文献では，(4.27) をローレンツ変換という場合が多い．しかし，この術語に関しては，物理学と数学では使い方が異なっている場合があるので注意を要する．すなわち，物理では，ローレンツ変換という言葉によって，ローレンツ座標系間の座標変換のことを指し，数学では，後に導入する，V_{M} の計量を不変にする V_{M} 上の線形写像 (ローレンツ写像) を指すのが普通である．ミンコフスキー空間の幾何学という観点からは，いうまでもなく，後者の方が重要である．座標の変換は時空の点の座標表示を変えるだけであり (点は動かない)，本質概念的には，ほとんどトリヴィアルなことだからである (ただし，具象的な系を解析する場合には有用でありうる)．

[*10] ニュートン力学的時空では，時間と空間は独立であったことを思い出そう．

4.2.4 ベクトルの分類

ミンコフスキーベクトル空間 V_{M} の計量は不定計量であるので，計量の正負に応じて V_{M} のベクトルを分類するのは自然である：

(i) $\langle x,x\rangle > 0$ を満たすベクトル $x \in V_{\mathrm{M}}$ を**時間的ベクトル** (time-like vector) という．時間的ベクトルの全体

$$V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}} := \{x \in V_{\mathrm{M}} \mid \langle x,x\rangle > 0\}. \tag{4.30}$$

を**時間的領域**という．

(ii) $\langle x,x\rangle < 0$ を満たすベクトル $x \in V_{\mathrm{M}}$ を**空間的ベクトル** (space-like vector) という．空間的ベクトルの全体

$$V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}} := \{x \in V_{\mathrm{M}} \mid \langle x,x\rangle < 0\}. \tag{4.31}$$

を**空間的領域**という．

(iii) $x \neq 0$ で，$\langle x,x\rangle = 0$ を満たすベクトル $x \in V_{\mathrm{M}}$ を**光的ベクトル** (light-like vector) という[*11]．光的ベクトルの全体に原点を加えた集合

$$V_{\mathrm{M}}^{0} := \{x \in V_{\mathrm{M}} \mid \langle x,x\rangle = 0\}. \tag{4.32}$$

を**光錐** (light cone) という．

$E = \{e_\mu\}_{\mu=0}^{d}$ をローレンツ基底とする．ベクトル $x \in V_{\mathrm{M}}$ の E に関する座標表示を $(x^0, x^1, \cdots, x^d)$ とする．このとき，次が成り立つ：

(i) x が時間的ベクトルであることと $(x^0)^2 > \sum_{i=1}^{d}(x^i)^2$ は同値である．

(ii) x が空間的ベクトルであることと $(x^0)^2 < \sum_{i=1}^{d}(x^i)^2$ は同値である．

(iii) $x \neq 0$ が光的ベクトルであることと $(x^0)^2 = \sum_{i=1}^{d}(x^i)^2$ は同値である．

4.2.5 時間的ベクトルの基本的性質

ミンコフスキー空間の計量は不定計量であるので，そこにおける幾何学はユークリッド幾何学と異なることが予想される．この側面に関する基本的事実を見ておこう．まず，次の命題は，時間的ベクトルと直交する零でないベクトルは必ず空間的ベクトルであることを語る[*12]．

[*11] ナル (ヌル) ベクトル (null vector) または**光円錐ベクトル** (light-cone vector) という場合もある．

[*12] もちろん，ここでの直交性は，ミンコフスキー内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (不定計量) に関するものである．

命題 4.6 $x\in V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}$ とする．このとき，x と直交する零でないベクトルはすべて空間的ベクトルである．すなわち，$\langle x,y\rangle=0$ かつ $y\neq 0$ ならば $y\in V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}}$.

証明 $x=\sum_{\mu=0}^{d}x^\mu e_\mu, y=\sum_{\mu=0}^{d}y^\mu e_\mu$ と展開する ($x^\mu, y^\mu\in\mathbb{R}$)．$y^0=0$ ならば $\langle y,y\rangle=-\sum_{i=1}^{d}(y^i)^2<0$ であるから，$y\in V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}}$. したがって，題意は成立する．

次に $y^0\neq 0$ の場合を考える．$\langle x,y\rangle=0$ より，$x^0y^0-\sum_{j=1}^{d}x^jy^j=0$. $\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^d), \boldsymbol{y}=(y^1,\cdots,y^d)$ とおけば，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$ であり，$x^0y^0=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle_{\mathbb{R}^d}$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}$ は d 次元ユークリッドベクトル空間 $\mathbb{R}^d$ の内積)．x は時間的ベクトルであるから，$\langle x,x\rangle>0$. したがって，$(x^0)^2-\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^d}^2>0$ ($\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^d}:=\sqrt{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle_{\mathbb{R}^d}}$; $\boldsymbol{x}$ のノルム)．ゆえに

$$|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle_{\mathbb{R}^d}|^2=(x^0)^2(y^0)^2>\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^d}^2(y^0)^2.$$

一方，正値内積に関するシュヴァルツの不等式により，$|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle_{\mathbb{R}^d}|^2\leq\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^d}^2\|\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^d}^2$. したがって，$(y^0)^2\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^d}^2<\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^d}^2\|\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^d}^2$. これは $(y^0)^2<\|\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^d}^2$ を意味するから，$y\in V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}}$ である． ■

ベクトル $x\in V_{\mathrm{M}}$ のノルムを $\|x\|$ と記す：$\|x\|:=\sqrt{|\langle x,x\rangle|}$ (したがって，x が時間的ベクトルならば $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$)．

次の 2 つの定理は，ミンコフスキー空間の幾何学がユークリッド幾何学と決定的に異なることを示す：

定理 4.7 (逆シュヴァルツ不等式) $x,y\in V_{\mathrm{M}}$ が時間的ベクトルならば

$$|\langle x,y\rangle|\geq\|x\|\|y\| \tag{4.33}$$

が成り立つ．

証明 $t_0:=-\langle x,y\rangle/\|x\|^2$ とすれば，$\langle t_0x+y,x\rangle=0$. したがって，命題 4.6 によって，$t_0x+y$ は零ベクトルまたは空間的ベクトルである．ゆえに，$\langle t_0x+y,t_0x+y\rangle\leq 0$. 一方，左辺を計算すれば，$\langle t_0x+y,t_0x+y\rangle=\|y\|^2-(\langle x,y\rangle^2/\|x\|^2)$. したがって，(4.33) が得られる． ■

定理 4.8 (逆 3 角不等式) $x,y\in V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}$ かつ $\langle x,y\rangle>0$ ならば，$x+y\in V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}$ かつ

$$\|x\|+\|y\|\leq\|x+y\|. \tag{4.34}$$

証明　$\langle x,x\rangle > 0, \langle y,y\rangle > 0, \langle ,x,y\rangle > 0$ より，$\langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle > 0 \cdots (*)$. したがって，$x+y \in V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}$. 定理 4.7 により，$\langle x,y\rangle \geq \|x\|\|y\|$. これと $(*)$ により，$\|x+y\|^2 \geq (\|x\|+\|y\|)^2$. ■

4.2.6　分解定理

命題 4.6 によって，任意の時間的ベクトル x に対して x の直交補空間

$$\{x\}^{\perp} := \{y \in V_M \mid \langle x,y\rangle = 0\} \tag{4.35}$$

は $V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}} \cup \{0\}$ に含まれる線形部分空間である.

定理 4.9 (分解定理)　e_{T} を任意の時間的な単位ベクトルとする：$\langle e_{\mathrm{T}}, e_{\mathrm{T}}\rangle = 1$. このとき，任意の $x \in V_{\mathrm{M}}$ に対して，ベクトル $x_{\mathrm{S}} \in \{e_{\mathrm{T}}\}^{\perp}$ が唯ひとつ存在し，

$$x = x_{\mathrm{S}} + \langle e_T, x\rangle e_T \tag{4.36}$$

と表される．特に

$$\dim\{e_T\}^{\perp} = d. \tag{4.37}$$

証明　任意のベクトル $x \in V_{\mathrm{M}}$ に対して $x_{\mathrm{S}} := x - \langle e_T, x\rangle e_T \cdots (*)$ とおけば，容易にわかるように，x_{S} と e_T は直交する．したがって，$x_{\mathrm{S}} \in \{e_T\}^{\perp}$. $(*)$ を x について解けば (4.36) が得られる．x_{S} の一意性は明らかであろう.

$\{e_{\mathrm{T}}\}^{\perp} \cap \mathscr{L}(\{e_{\mathrm{T}}\}) = \{0\}$ であるから，(4.36) はベクトル空間 V_{M} の直和分解である．したがって，$d+1 = \dim V_{\mathrm{M}} = \dim\{e_{\mathrm{T}}\}^{\perp} + 1$. ゆえに (4.37) がしたがう．■

定理 4.10　任意の時間的な単位ベクトル e_{T} に対して，空間的ベクトル $v_1, \cdots, v_d \in V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}}$ で $(e_{\mathrm{T}}, v_1, \cdots, v_d)$ が V_{M} のローレンツ基底となるものが存在する.

証明　(4.37) により，$\{e_{\mathrm{T}}\}^{\perp}$ は d 次元実ベクトル空間であるから，d 個の線形独立なベクトル $u_1, \cdots, u_d$ がとれる．これらは空間的ベクトルであるから，$\langle u_i, u_i\rangle < 0$ $(i = 1, \cdots, d)$. グラム–シュミットの直交化法と同じ考え方により，$u_1, \cdots, u_d$ から正規直交系 $\{v_i\}_{i=1}^{d}$ で $v_i \in \{e_{\mathrm{T}}\}^{\perp}$ かつ $\langle v_i, v_j\rangle = -\delta_{ij}$ を満たすものがつくれる.

■

4.3　ローレンツ写像群

4.3.1　ローレンツ写像

V_{M} 上の線形作用素 $\Lambda : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow V_{\mathrm{M}}$ がすべての $x, y \in V_{\mathrm{M}}$ に対して

$$\langle \Lambda x, \Lambda y \rangle = \langle x, y \rangle \tag{4.38}$$

を満たすとき，Λ を**ローレンツ写像**と呼ぶ[*13]．ローレンツ写像とは，言いかえれば，V_{M} 上の直交変換 (付録 C, C.2 節を参照) のことに他ならない．ローレンツ写像の全体 $\mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ (V_{M} 上の直交変換の全体) が群 (変換群) をなすことは，例 1.50 で証明した ($\mathsf{V} = V_{\mathrm{M}}$ の場合を考えればよい)．この群を V_{M} 上の**ローレンツ写像群**と呼ぶ．性質 (4.38) をミンコフスキー計量の**ローレンツ不変性**または**ローレンツ対称性**と呼ぶ．

次の性質は (4.38) から容易に導くことができる：

(i) $x \in V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}$ ならば，任意の $\Lambda \in \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ に対して $\Lambda x \in V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}$. すなわち，ローレンツ写像は時間的ベクトルを時間的ベクトルに写す．

(ii) $x \in V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}}$ ならば，任意の $\Lambda \in \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ に対して $\Lambda x \in V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}}$. すなわち，ローレンツ写像は空間的ベクトルを空間的ベクトルに写す．

(iii) $x \in V_{\mathrm{M}}^{0}$ ならば，任意の $\Lambda \in \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ に対して $\Lambda x \in V_{\mathrm{M}}^{0}$. すなわち，ローレンツ写像は光的ベクトルを光的ベクトルに写す．

ベクトルの組 $E = \{e_\mu\}_{\mu=0}^{d}$ をローレンツ基底とし，E に関する $\Lambda \in \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ の行列表示を $\Lambda_E := (\Lambda_\mu^\nu)$ としよう：

$$\Lambda e_\mu = \sum_{\alpha=0}^{d} \Lambda_\mu^\alpha e_\alpha. \tag{4.39}$$

(4.38) において $x = e_\mu, y = e_\nu$ ととることにより $\sum_{\alpha,\beta=0}^{d} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}$. これは ${}^{\mathrm{t}}\Lambda_E \eta \Lambda_E = \eta$ を意味する．したがって，Λ_E はローレンツ行列である．他方，定理 4.2 (i) によって，ローレンツ行列の行列式は ± 1 であるから，$\det \Lambda_E = \pm 1$. したがって，Λ の行列式 $\det \Lambda$ (付録 B, B.2.3 項を参照) について

$$\det \Lambda = \pm 1 \tag{4.40}$$

が成り立つ．そこで，$\mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ の部分集合

$$\mathrm{O}_+(V_{\mathrm{M}}) := \{\Lambda \in \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}}) \mid \det \Lambda = 1\} \tag{4.41}$$

を考えると，これは $\mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ の部分群である．

[*13] ローレンツ写像を**ローレンツ変換**と呼ぶ場合もある．だが，本書では，注意 4.5 で述べた事柄に照らして，混乱を避けるため，この言葉は用いない．

4.3.2 ローレンツ群とローレンツ写像群の関係

ローレンツ写像群 $\mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ とローレンツ群 $\mathscr{L}(d+1)$ の関係を調べよう．$\{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ を V_{M} のローレンツ基底とし，任意の $x\in V_{\mathrm{M}}$ を (4.17) のように展開する．各ローレンツ行列 $L\in\mathscr{L}(d+1)$ に対して，$T_L:V_{\mathrm{M}}\longrightarrow V_{\mathrm{M}}$ を

$$T_L(x):=\sum_{\mu,\nu=0}^d L_\nu^\mu x^\nu e_\mu \tag{4.42}$$

によって定義する．このとき，任意の $y=\sum_{\mu=0}^d y^\mu e_\mu\in V_{\mathrm{M}}$ に対して

$$\langle T_L(x),T_L(y)\rangle=\sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta=0}^d L_\nu^\mu L_\beta^\alpha \eta_{\mu\alpha}x^\nu y^\beta.$$

そこで，$\sum_{\mu,\alpha=0}^d L_\nu^\mu \eta_{\mu\alpha}L_\beta^\alpha=\eta_{\nu\beta}$ $(\because {}^{\mathrm{t}}L\eta L=\eta)$ に注意すれば $\langle T_L(x),T_L(y)\rangle=\langle x,y\rangle$ を得る．したがって，T_L はローレンツ写像である．そこで写像 $\rho:\mathscr{L}(d+1)\longrightarrow \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ を

$$\rho(L):=T_L \tag{4.43}$$

によって定義する．このとき，第 1 章の演習問題 8 と同様にして，ρ は同型写像であることがわかる．ゆえに，$\mathscr{L}(d+1)$ と $\mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ は同型である．この場合，任意の $\Lambda\in\mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ に対して，$\rho^{-1}(\Lambda)$ は Λ の基底 $E=\{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ に関する行列表示 Λ_E になっている．こうして，ローレンツ写像群は，ローレンツ群の忠実なユニタリ表現であることがわかる[*14]．

4.3.3 ローレンツ写像群と時間的ベクトル

次の重要な事実を証明しておく．

定理 4.11 $x,y\in V_{\mathrm{M}}$ を時間的ベクトルで $\|x\|=\|y\|$ を満たすものとする．このとき，$y=\Lambda x$ を満たす $\Lambda\in\mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ が存在する．

証明 $v_0=x/\|x\|, u_0=y/\|y\|$ とおけば，v_0,u_0 は時間的な単位ベクトルである．定理 4.10 によって，空間的ベクトル $v_1,\cdots,v_d$ で $(v_0,v_1,\cdots,v_d)$ が V_{M} のローレンツ基底になるものが存在する．行列 $L=(L_\mu^\nu)$ を

$$L_\mu^\nu:=\sum_{\alpha=0}^d \eta^{\nu\alpha}\langle e_\alpha,v_\mu\rangle$$

---

*14 ユニタリ表現の定義については，第 1 章，1.3.4 項を参照．

によって定義する ($\eta^{\mu\nu}$ は η^{-1} の (μ,ν) 成分であり，じつは $\eta_{\mu\nu}$ に等しい：(4.21), (4.23) を参照)．このとき，L はローレンツ行列である．実際，(4.22) によって $v_\mu = \sum_{\alpha=0}^{d} L_\mu^\alpha e_\alpha$ であり，$\langle v_\mu, v_\nu\rangle = \eta_{\mu\nu}$ であるから，$\eta_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{d} L_\mu^\alpha L_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta}$ が成り立つ．

(4.42) と (4.43) から，$\rho(L)e_0 = v_0$ が成立する．同様に，$\rho(K)e_0 = u_0$ となるローレンツ行列 K が存在する．したがって，$u_0 = \rho(K)\rho(L)^{-1}v_0$ であるから，$\Lambda = \rho(K)\rho(L)^{-1}$ とおけば $\Lambda \in \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ であって，$y = \Lambda x$ が成り立つ． ■

4.3.4 ポアンカレ変換群

任意の $\Lambda \in \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ と $a \in V_{\mathrm{M}}$ に対して，写像 $(\Lambda,a): V_{\mathrm{M}} \longrightarrow V_{\mathrm{M}}$ を

$$(\Lambda,a)x := \Lambda x + a, \quad x \in V_{\mathrm{M}}$$

によって定義する．これを**ポアンカレ変換**という．この写像は，V_{M} 上のアファイン変換の一種であり，V_{M} の各点をローレンツ写像 Λ で写し，次にそれをベクトル a だけ平行移動するという操作を記述する．ポアンカレ変換の全体

$$\mathscr{P}(V_{\mathrm{M}}) := \{(\Lambda,a) \mid \Lambda \in \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}}), a \in V_{\mathrm{M}}\} \tag{4.44}$$

は V_{M} 上の変換群になる．実際，$(\Lambda_1,a_1),(\Lambda_2,a_2) \in \mathscr{P}(V_{\mathrm{M}})$ の積 (合成写像) は次のように与えられることがわかる：

$$(\Lambda_2,a_2)(\Lambda_1,a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \in \mathscr{P}(V_{\mathrm{M}}). \tag{4.45}$$

この変換群を**ポアンカレ変換群**と呼ぶ．

ポアンカレ変換は，ミンコフスキーベクトル空間の任意の 2 点 $x, y \in V_{\mathrm{M}}$ の計量を保存する．すなわち，任意の $(\Lambda,a) \in \mathscr{P}(V_{\mathrm{M}})$ に対して

$$\langle (\Lambda,a)(x) - (\Lambda,a)(y), (\Lambda,a)(x) - (\Lambda,a)(y)\rangle = \langle x-y, x-y\rangle \tag{4.46}$$

が成り立つ．

4.4 ローレンツ対称性

第 1 章の一般論にしたがって，V_{M} の部分集合および V_{M} 上の関数に対して，ローレンツ写像およびローレンツ写像群に関する対称性が定義される．ここでは，基本的な例や事柄だけをとりあげる．

4.4.1　O(V_{M}) 対称な図形の例

例 4.12　光錐 V_{M}^0 は O(V_{M}) 対称である．すなわち，任意の $\Lambda \in \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ に対して $\Lambda(V_{\mathrm{M}}^0) = V_{\mathrm{M}}^0$.

例 4.13　定数 $k \in \mathbb{R}$ に対して定まる部分集合

$$H_k := \{x \in V_{\mathrm{M}} \mid \langle x, x \rangle = k\} \tag{4.47}$$

を考える．明らかに，$H_0 = V_{\mathrm{M}}^0$. $k \neq 0$ のとき H_k を**双曲的超曲面** (hyperbolic hypersurface) と呼ぶ．特に，$k > 0$ のとき H_k を**時間的双曲的超曲面**，$k < 0$ のとき，H_k を**空間的双曲的超曲面**という．

双曲的超曲面は，ミンコフスキーベクトル空間における基本的な曲面であり，ユークリッド空間における球面に相当する対象である (次の命題も参照).

命題 4.14　$k \in \mathbb{R}$ を任意に固定する．このとき，H_k は O(V_{M}) 対称である．

証明　$\Lambda(H_k) \subset H_k$ はミンコフスキー計量のローレンツ不変性から明らか．$\Lambda \in \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ とする．任意の $x \in H_k$ に対して $x' = \Lambda^{-1}x$ とすれば，$x' \in H_k$ であって $\Lambda x' = x$ であるから，$\Lambda : H_k \longrightarrow H_k$ は全射である． ■

4.4.2　ローレンツ不変量

写像 $\phi : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{C}$ — V_{M} 上のスカラー場 — がすべての $\Lambda \in \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ に対して

$$\phi(\Lambda x) = \phi(x), \quad x \in V_{\mathrm{M}}$$

を満たすとき，ϕ は**ローレンツ不変**であるという．対称性の観点からは，ϕ は O(V_{M}) 対称ということである (1.6 節，1.6.1 項を参照).

例 4.15　ミンコフスキー計量のローレンツ不変性により，任意の写像 $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して，$\phi(x) = h(\langle x, x \rangle)$ によって定義される関数 ϕ はローレンツ不変である．

ローレンツ不変な関数の一般形は次の定理によって与えられる：

定理 4.16　$\phi : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{C}$ をローレンツ不変なスカラー場とする．このとき，$\Phi : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ があって

$$\phi(x) = \Phi(\langle x, x \rangle), \quad x \in V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}} \tag{4.48}$$

が成り立つ．

証明 $V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}=\bigcup_{k>0}H_k$ と書ける．定理 4.11 によって，任意の $x,y\in H_k$ $(k>0)$ に対して $y=\Lambda x$ となる $\Lambda\in\mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ がある．したがって，仮定により $\phi(x)=\phi(y)$. つまり，ϕ は H_k 上では定数である．この定数を c_k とすれば，$\phi(x)=c_k$ $(x\in H_k)$. そこで，写像 $\Phi:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{C}$ を $\Phi(k):=c_k$ $(k>0)$ によって定義する．このとき，任意の $x\in V_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}$ に対して $\langle x,x\rangle=k_x$ となる $k_x>0$ があるから，$\Phi(\langle x,x\rangle)=c_{k_x}=\phi(x)$. したがって，題意が成り立つ． ■

4.5 運動方程式

4.5.1 質点の運動

特殊相対性理論では，質点の運動は，ミンコフスキー空間 $\mathbb{M}^{d+1}$ の曲線によって表される (公理)．この曲線を**世界線**または**運動曲線**と呼ぶ．これは，より明示的には，$\mathbb{M}^{d+1}$ の基準ベクトル空間であるミンコフスキーベクトル空間 V_{M} の曲線によって表される．いま，質点の運動曲線を

$$\gamma:[\alpha,\beta]\longrightarrow V_M\ ;\ s\ni[\alpha,\beta]\longmapsto\gamma(s)\in V_M \tag{4.49}$$

としよう．γ は単射かつ連続微分可能であるとし，その逆写像 γ^{-1} も連続微分可能であるとする[*15]．なお，ここでの s は単なるパラメータであり，“時刻” を表すわけではない[*16]．運動曲線 γ を単に**運動**とも呼ぶ．曲線 γ の中の任意の点 $\gamma(s)$ における曲線 γ の接ベクトルは

$$\dot{\gamma}(s):=\frac{d\gamma(s)}{ds} \tag{4.50}$$

で与えられる．これを用いて，運動を分類する：

(i) すべての $s\in[\alpha,\beta]$ に対して $\dot{\gamma}(s)$ が時間的ベクトルであるとき，運動 γ は**いたるところ時間的**であるという．

(ii) すべての $s\in[\alpha,\beta]$ に対して，$\dot{\gamma}(s)$ が光的ベクトルであるとき，γ は**いたるところ光的**であるという．

(iii) すべての $s\in[\alpha,\beta]$ に対して，$\dot{\gamma}(s)$ が空間的ベクトルであるとき，γ は**いたるところ空間的**であるという．

---

*15 以下で考察する V_{M} の曲線は，つねにこの性質を持つとし，必要とあらば，附加的な微分可能性も仮定する．

*16 すでに述べたように，通常の時間および空間はローレンツ座標系をとって初めて発現する．

注意 4.17 運動 γ がいたるところ時間的であっても，位置 $\gamma(s)$ が時間的ベクトルになるとは限らない．他の場合も同様．

4.5.2 固有時

紙幅の関係上，運動 γ がいたるところ時間的である場合のみを考察する[*17]．質点の運動方程式を座標系の取り方によらない絶対的な形式で定式化するために，運動に固有のある幾何学的な量を導入する．

曲線 γ から決まる自然な幾何学的スカラー量 (座標系の取り方によらない絶対的スカラー量) の 1 つはその長さ

$$L(\gamma) := \int_\alpha^\beta \sqrt{\langle \dot\gamma(s), \dot\gamma(s)\rangle}\, ds = \int_\alpha^\beta \|\dot\gamma(s)\|\, ds \tag{4.51}$$

である．$L(\gamma)$ を光速 c で割った量

$$\tau(\gamma) := \frac{1}{c} L(\gamma) = \frac{1}{c}\int_\alpha^\beta \|\dot\gamma(s)\|_{V_M}\, ds \tag{4.52}$$

は時間の次元を持つ．これも γ だけに依存して定まる絶対的な量である．

量 $\tau(\gamma)$ の物理的意味をさぐるために，曲線 γ の運動を行う質点が時計であるとしよう．この時計は運動をしながら時を刻んでいく．時計が時を刻むのも物理的現象であり，刻まれた時間は物理量である．それは，運動している時計に即して決まる量である．$\tau(\gamma)$ が時間の次元を持つことを考慮すると，$\tau(\gamma)$ はまさにこの物理量であると解釈される．そこで，$\tau(\gamma)$ を — 運動する質点に即して決まる時間という意味で — 運動 γ の**固有時**と呼ぶ．

任意の $s \in [\alpha, \beta]$ に対して

$$T(s) := \frac{1}{c}\int_\alpha^s \sqrt{\langle \dot\gamma(s'), \dot\gamma(s')\rangle}\, ds' \tag{4.53}$$

を考える．これはパラメータの定義域が $[\alpha, s]$ に制限された運動の固有時に他ならない．関数 $T : [\alpha, \beta] \longrightarrow [0, \infty); s \longmapsto T(s)$ は狭義単調増加で連続微分可能であり

$$T'(s) = \frac{dT(s)}{ds} = \frac{\sqrt{\langle \dot\gamma(s), \dot\gamma(s)\rangle}}{c}. \tag{4.54}$$

したがって，その逆写像 T^{-1} は存在し，それは

$$\Gamma := T([\alpha, \beta]) \tag{4.55}$$

[*17] 運動が空間的，光的の場合についても考察は可能である．拙著『物理現象の数学的諸原理』(共立出版，2003) の第 8 章，8.8 節を参照．

から $[\alpha,\beta]$ への狭義単調増加かつ連続微分可能な関数である．次の関係式は逆関数の定義と微分法からただちにしたがう：

$$T^{-1}(T(s))=s, \quad s\in[\alpha,\beta], \tag{4.56}$$

$$T(T^{-1}(\tau))=\tau, \quad \tau\in\Gamma, \tag{4.57}$$

$$\frac{d}{d\tau}T^{-1}(\tau)=\frac{1}{T'(T^{-1}(\tau))}, \quad \tau\in\Gamma. \tag{4.58}$$

さて，写像 $X:\Gamma\longrightarrow V_{\mathrm{M}}$ を

$$X(\tau):=\gamma(T^{-1}(\tau)), \quad \tau\in\Gamma \tag{4.59}$$

によって定義する．これは，要するに曲線 γ のパラメータ表示を $s\in[\alpha,\beta]$ から $\tau\in\Gamma$ に変えたものである．だが，この変更は次の命題に述べる意味で重要な意味を持つ：

命題 4.18 (i) すべての $s\in[\alpha,\beta]$ に対して

$$\dot{X}(T(s))=\frac{1}{T'(s)}\dot{\gamma}(s). \tag{4.60}$$

(ii) すべての $\tau\in\Gamma$ に対して

$$\langle\dot{X}(\tau),\dot{X}(\tau)\rangle=c^2, \quad \tau\in\Gamma. \tag{4.61}$$

証明 (i) 合成関数の微分法と (4.58) による．

(ii) (i) と (4.54) を使えばよい． ■

上の命題の (i) は，曲線 X の点 $X(\tau)$ での接ベクトルは曲線 γ の点 $\gamma(T^{-1}(\tau))$ での接ベクトルに比例することを語る．他方，(ii) は，X の点 $X(\tau)$ での接ベクトルのノルムが τ によらず一定であることを示す．これは，曲線 X の点 $X(0)$ ($0\in\Gamma$ と仮定する) から $X(\tau)$ までの固有時が τ に等しい意味する．つまり，曲線 X は，自らを表すパラメータが自らの固有時に一致するような曲線なのである．そこで X を γ の**固有時表示**と呼ぶ．

4.5.3 運動方程式

以上の準備のもとで，特殊相対性理論における質点の運動方程式を書き下すことができる．質点の運動を表す曲線 γ の固有時表示を X とする．このとき，その導関数 $\dot{X}$ を**速度**，2 階の導関数 $\ddot{X}=d^2X/d\tau^2$ を**加速度**と呼ぶ．速度の固有時 τ における値 $\dot{X}(\tau)$ を点 $X(\tau)$ での $(d+1)$ **次元速度ベクトル**，加速度の値 $\ddot{X}(\tau)$ を

$(d+1)$ 次元**加速度ベクトル**という．

一般に，**特殊相対性理論における力場**は，$V_{\rm M}\times V_{\rm M}$ から $V_{\rm M}$ への写像として定義される．いま，このような写像の 1 つを任意に選び，これを K とする．この力場のもとでの**質点の運動方程式**は

$$m\frac{d^2X(\tau)}{d\tau^2}=K(X(\tau),\dot{X}(\tau)), \tag{4.62}$$

$$\langle\dot{X}(\tau),\dot{X}(\tau)\rangle=c^2 \tag{4.63}$$

で与えられる (公理)．ただし，$m>0$ は定数で質点の**静止質量**と呼ばれる．なお，(4.63) は，X が運動曲線の固有時表示であることによる拘束条件である．この連立方程式が，座標系の取り方によらない，幾何学的な量だけで表されていることは明白であろう．(4.62), (4.63) を**特殊相対論的運動方程式**と呼ぶ．

4.5.4 ローレンツ座標系での表示

以上によって，座標系の取り方からは独立した運動方程式の定式化がなされたので，次に，その座標表示を考察しよう．

$E=\{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ をローレンツ基底とし，運動曲線 γ は，線形座標系 $(V_{\rm M},E)$ において

$$\gamma(t)=cte_0+\sum_{j=1}^d\gamma^j(t)e_j,\quad t\in[\alpha,\beta] \tag{4.64}$$

という形で与えらえるとしよう．この場合，すでに指摘したように，パラメータ t はニュートン力学的な意味での時間パラメータと解釈されるものである．空間成分 $\gamma^j(t)$ の時間微分

$$v^j(t):=\dot{\gamma}^j(t),\quad j=1,\cdots,d \tag{4.65}$$

の組

$$\boldsymbol{v}(t):=(v^1(t),v^2(t),\cdots,v^d(t))\in\mathbb{R}^d \tag{4.66}$$

をローレンツ座標系 $(V_{\rm M},E)$ における**空間的速度ベクトル**，その大きさ

$$\|\boldsymbol{v}(t)\|=\sqrt{\sum_{j=1}^d(v^j(t))^2} \tag{4.67}$$

を**空間的速さ**と呼ぶ*18．これを用いると

---

*18 これらの概念は，便宜的・相対的な意味しか持たない．なぜなら，ローレンツ座標系をとりかえれば，空間的速度ベクトルの成分は，一般には，時間成分と混ざってしまうからである．

$$\dot{\gamma}(t)=ce_0+\sum_{j=1}^{d}v^j(t)e_j$$

と表されるので

$$\langle\dot{\gamma}(t),\dot{\gamma}(t)\rangle=c^2-\|\boldsymbol{v}(t)\|^2. \tag{4.68}$$

したがって，運動γが時間的運動であるための必要十分条件は

$$\|\boldsymbol{v}(t)\|<c \tag{4.69}$$

が成り立つことである．これは，つまり，空間的速さが光速よりも小さいということである．逆にいえば，ローレンツ座標系で空間的速さが光速よりも小さい運動は時間的であるということである．

(4.68) によって，t を固有時に写す関数 T は

$$\frac{dT(t)}{dt}=\sqrt{1-\frac{\|\boldsymbol{v}(t)\|^2}{c^2}} \tag{4.70}$$

を満たす．

さて，γ の固有時表示を X とし，そのローレンツ座標系 (V_{M},E) における展開を

$$X(\tau)=X^0(\tau)e_0+\sum_{j=1}^{d}X^j(\tau)e_\mu \tag{4.71}$$

としよう $(X^\mu(\tau)\in\mathbb{R})$．$\tau=T(t)$ と t の間には

$$\frac{d\tau}{dt}=\sqrt{1-\frac{\|\boldsymbol{v}(t)\|^2}{c^2}} \tag{4.72}$$

という関係がある．したがって，$X(\tau)=\gamma(t)$ であるから

$$X^0(\tau)=ct,\quad X^j(\tau)=\gamma^j(t). \tag{4.73}$$

また

$$\frac{dX(\tau)}{dt}=ce_0+\sum_{j=1}^{d}v^j(t)e_j.$$

左辺は $(d\tau/dt)\cdot\dot{X}(\tau)$ に等しいから

$$\dot{X}(\tau)=\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\|\boldsymbol{v}(t)\|^2}{c^2}}}e_0+\sum_{j=1}^{d}\frac{v^j(t)}{\sqrt{1-\frac{\|\boldsymbol{v}(t)\|^2}{c^2}}}e_j \tag{4.74}$$

を得る．これを見ると，$(d+1)$ 次元速度ベクトルのローレンツ座標系での空間速度成分は $v^j(t)$ ではなく，これに因子 $1\Big/\sqrt{1-\frac{\|\boldsymbol{v}(t)\|^2}{c^2}}$ がかかったものであるこ

とがわかる．この因子は，ニュートン力学から見た場合，**相対論的補正**と呼ばれる．だが，特殊相対性理論の立場からは，ニュートン力学は，特殊相対性理論のある種の近似であるということになる．なぜなら，$\|\boldsymbol{v}(t)\| \ll c$ (空間的速さが光速に比べて十分小さいという場合)

$$\frac{v^j(t)}{\sqrt{1-\dfrac{\|\boldsymbol{v}(t)\|^2}{c^2}}} \approx v^j(t)$$

となるからである．この種の近似を**非相対論的近似**と呼び，物理量について，極限 $\|\boldsymbol{v}(t)\|/c \longrightarrow 0$ をとることを**非相対論的極限**と呼ぶ．こうして，ニュートン力学は，特殊相対論的力学のローレンツ座標系における非相対論的極限として捉えられる．

次に，力場 K を

$$K(x,v) = \sum_{\mu=0}^{d} K^\mu(x,v)e_\mu, \quad (x,v) \in V_{\mathrm{M}} \times V_{\mathrm{M}} \tag{4.75}$$

と展開しよう ($K^\mu(x,v) \in \mathbb{R}$)．合成関数の微分法により

$$\frac{d\tau}{dt}\frac{d^2X(\tau)}{d\tau^2} = \frac{d\dot{X}(\tau)}{dt}.$$

これと運動方程式 (4.62), (4.72), (4.74) によって

$$m\frac{d}{dt}\frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{\|\boldsymbol{v}(t)\|^2}{c^2}}} = \sqrt{1-\frac{\|\boldsymbol{v}(t)\|^2}{c^2}}\,K^0(X(\tau),\dot{X}(\tau)), \tag{4.76}$$

$$m\frac{d}{dt}\frac{v^j(t)}{\sqrt{1-\dfrac{\|\boldsymbol{v}(t)\|^2}{c^2}}} = \sqrt{1-\frac{\|\boldsymbol{v}(t)\|^2}{c^2}}\,K^j(X(\tau),\dot{X}(\tau)), \tag{4.77}$$

$$j = 1,\cdots,d, \tag{4.78}$$

が得られる．これがローレンツ座標系 (V_{M}, E) での運動方程式である*19．

質点の**運動量**は

$$p(\tau) = m\dot{X}(\tau) \tag{4.79}$$

によって定義される．(4.61) によって

$$\|p(\tau)\| = mc \tag{4.80}$$

が成り立つ．これは任意の時間的運動について成り立つことに注意しよう．

*19 $d=3$ の場合，通常の物理学の教科書に出てくる形．

4.6 特殊相対論的運動方程式の解空間の対称性

ニュートンの運動方程式の場合と同様に，特殊相対論的運動方程式 (4.62), (4.63) の解空間の対称性を論じることができる．

基本的な定理は次である：

定理 4.19 X を (4.62), (4.63) の解とする．任意のローレンツ写像 $\Lambda \in \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ に対して，曲線 X_Λ を

$$X_\Lambda(\tau) := \Lambda X(\tau), \quad \tau \in \Gamma \tag{4.81}$$

によって定義する．さらに，力場 K は次の条件を満たすとする：

$$\Lambda K(\Lambda^{-1}x, \Lambda^{-1}v) = K(x,v), \quad (x,v) \in V_{\mathrm{M}} \times V_{\mathrm{M}}. \tag{4.82}$$

このとき，X_Λ は (4.62)，(4.63) の解である．

証明 まず

$$m\frac{d^2X_\Lambda(\tau)}{d\tau^2} = \Lambda\left(m\frac{d^2X(\tau)}{d\tau^2}\right) = \Lambda K(X(\tau), \dot{X}(\tau))$$

$$= \Lambda K(\Lambda^{-1}\Lambda X(\tau), \Lambda^{-1}\Lambda\dot{X}(\tau)).$$

そこで，$\dot{X}_\Lambda(\tau) = \Lambda\dot{X}(\tau)$ に注意し (4.82) を使えば，

$$m\frac{d^2X_\Lambda(\tau)}{d\tau^2} = K(X_\Lambda(\tau), \dot{X}_\Lambda(\tau))$$

が得られる．したがって，X_Λ は (4.62) を満たす．また，ミンコフスキー計量のローレンツ対称性により，X_Λ は (4.63) も満たすことがわかる． ■

条件 (4.82) が成り立つとき K は**ローレンツ対称**であるといい，この性質を**力場 K のローレンツ対称性**と呼ぶ．

定理 4.19 の内容を特殊相対論的運動方程式の解空間の対称性として表すことができるのは，ニュートンの運動方程式の場合と同様であるので，その詳細は省略する．

例 4.20 k, α を実定数とするとき，$K(x,v) = kx + \alpha v$ $(x, v \in V_{\mathrm{M}})$ によって定義される力場 K はローレンツ対称である．問題 5 も参照．

第 4 章の演習問題

V_{M} は $(d+1)$ 次元ミンコフスキーベクトル空間であるとする．

1. χ を任意の実数として，$(d+1)$ 次の行列 $L(\chi)$ を次のように定義する ($\cosh\chi$, $\sinh\chi$ はそれぞれ，双曲線余弦関数，双曲線正弦関数を表わす)：

$$L(\chi)=\begin{pmatrix} \cosh\chi & \sinh\chi & 0 & \cdots & 0 \\ \sinh\chi & \cosh\chi & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) $L(\chi)\in\mathscr{L}_+^\uparrow(d+1)$ を示せ．

(ii) 任意の $\chi,\theta\in\mathbb{R}$ に対して $L(\chi+\theta)=L(\chi)L(\theta)$ を示せ．

2. T を d 次の直交行列とするとき

$$L_T:=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

は $\mathscr{L}_+^\uparrow(d+1)$ の元であることを示せ．

3. V_{M} における自由な特殊相対論的運動方程式

$$m\frac{d^2X(\tau)}{d\tau^2}=0, \quad \langle\dot{X}(\tau),\dot{X}(\tau)\rangle=c^2$$

の一般解を求めよ．

4. $E=\{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ を V_{M} におけるローレンツ基底とし，各 $v\in\mathbb{R}$ に対して，写像 $\Lambda_v:V_{\mathrm{M}}\longrightarrow V_{\mathrm{M}}$ を

$$\Lambda_v(x):=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left(x^0+\frac{v}{c}x^1\right)e_0+\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left(x^1+\frac{v}{c}x^0\right)e_1+\sum_{i=2}^d x^i e_i,$$

$$x=\sum_{\mu=0}^d x^\mu e_\mu\in V_{\mathrm{M}}$$

によって定義する．このとき，Λ_v はローレンツ写像であることを示せ．

注　ローレンツ写像 Λ_v は，e_1 軸方向への速度 v のブーストと呼ばれる．

5. k を零でない任意の実数とするとき，力場 K が $K(x,v)=-kx$ $(x\in V_{\mathrm{M}})$ である場合の特殊相対論的運動方程式

$$m\frac{d^2X(\tau)}{d\tau^2}=-kX(\tau), \quad \langle\dot{X}(\tau),\dot{X}(\tau)\rangle=c^2$$

の一般解を求めよ．

第5章

古典電磁気学

5.1　はじめに

第4章のはじめでふれたように，古典電磁気学は，巨視的な電磁現象の領域を原理的な仕方で統一的に記述する理論体系である．この章では，この理論の本質的な部分に焦点を絞り，そこに含まれる対称性の構造を考察する．

電磁現象に関わる基本的な物理量は，**電荷**，**電流**，**電場**，**磁場**である．だが，これらの量は，じつは，絶対的なものではなく，時空の座標系 (観測系) の取り方に依存することが観測事実として確認される．したがって，電磁現象の絶対的本質を探究するためには，電荷，電流，電場，磁場といった物理量を，時間と空間の場合と同様に，何らかの絶対的対象，すなわち，時空の座標系の取り方によらない対象の "分節" としてとらえる観点へと移行する必要がある．以下では，まず，この側面を数学的に記述する．

4.2節で指摘したように，電磁現象が展開される時空は4次元ミンコフスキー空間である．だが，これまでの章と同様，より自由で普遍的な観点から理論構造を俯瞰するために，時空として $(d+1)$ 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{M}^{d+1}$ をとり，その基準ベクトル空間である $(d+1)$ 次元ミンコフスキーベクトル空間を V_{M} とする．前段の事柄に関して，あらかじめ1つの見通しを述べるならば，**電荷密度** (= 物理的空間の単位体積あたりの電荷) と**電流密度** (= 単位時間あたりに物理的空間の単位面積を貫く電流) は1つの組として絶対的な量をなし，電場と磁場は，**電磁場**と呼ばれるある1つの絶対的な実体のローレンツ座標系での成分であることが見出される．

5.2 電磁ポテンシャル

V_{M} に同伴する自然なベクトル空間の１つとして，V_{M} 上の線形汎関数の空間，すなわち，V_{M} の双対空間 V_{M}^* がある．このベクトル空間も物理現象に対して何らかの役割を演じていることが想定される．実際，結論からいえば，電磁現象の源たる理念は，V_{M} から V_{M}^* への連続微分可能な写像

$$A: V_{\mathrm{M}} \longrightarrow V_{\mathrm{M}}^*; V_{\mathrm{M}} \ni x \longmapsto A(x) \in V_{\mathrm{M}}^*$$

によって与えられる (公理)．これを**電磁ポテンシャル**と呼ぶ[*1]．

注意 5.1 より一般的には，電磁ポテンシャル A は，V_{M} の開集合 Ω から V_{M}^* への連続微分可能な写像として定義される．だが，技術的な煩雑さを避けるために，$\Omega = V_{\mathrm{M}}$ の場合だけを考察する．

注意 5.2 一般に，ベクトル空間 V の開集合 Ω からその双対空間 V* への連続微分可能な写像は，Ω 上の **1 次微分形式**と呼ばれる．したがって，この観点からいえば，電磁ポテンシャルは V_{M} の中の開集合上の１次微分形式である．

$E = \{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ を V_{M} の任意の基底とし (ローレンツ基底である必要はない)，その双対基底を $E^* := \{\phi^\mu\}_{\mu=0}^d$ とする．すなわち，

$$\phi^\mu(e_\nu) = \delta_\nu^\mu, \quad \mu, \nu = 0, 1, \cdots, d.$$

電磁ポテンシャル A の $x \in V_{\mathrm{M}}$ における像 $A(x)$ は V_{M}^* の元であるから

$$A(x) = \sum_{\mu=0}^d A_\mu(x) \phi^\mu \tag{5.1}$$

と展開される．この場合，$(A_\mu)_\mu := (A_0(x), \cdots, A_d(x))$ を $A(x)$ の線形座標系 (V_{M}, E) における**座標表示**または**成分表示**という．双対基底の性質

$$\phi^\mu(e_\nu) = \delta_\nu^\mu \tag{5.2}$$

によって

$$A_\mu(x) = A(x)(e_\mu) \quad (A(x) \in V_{\mathrm{M}}^* \text{ の } e_\mu \text{ における値}) \tag{5.3}$$

となることがわかる．したがって，$A_\mu(x)$ は x のスカラー関数として，連続微分可能である．

[*1] ここで展開される**古典電磁気学の公理論的理論**は，標準的なものではないことをお断りしておく．自然哲学的には，古典的 (非量子論的) 電磁現象に関わる理念界の領域を “上方” から “下方” へと辿る道 (“下方” の “末端” を存在の表層的・現象的次元として捉える) の１つを提示するものである．

別の線形座標系 (V_{M}, E') $(E'=\{e'_\mu\}_{\mu=0}^d)$ (これもローレンツ基底である必要はない) での $A(x)$ の成分表示を $(A_\mu(x)')_\mu$ とすれば

$$A(x)=\sum_{\mu=0}^{d}A_\mu(x)\phi^\mu=\sum_{\mu=0}^{d}A_\mu(x)'\phi^{\mu\prime}. \tag{5.4}$$

ただし，$\{\phi^{\mu\prime}\}_{\mu=0}^d$ は E' の双対基底である．基底の変換：$E\longmapsto E'$ の行列を $L=(L_\nu^\mu)$ としよう：

$$e'_\mu=\sum_{\nu=0}^{d}L_\mu^\nu e_\nu. \tag{5.5}$$

このとき，付録 B, B.2.8 項の一般論より

$$\phi'_\mu=\sum_{\nu=0}^{d}(L^{-1})_\nu^\mu\phi^\nu \tag{5.6}$$

であり

$$A_\mu(x)'=\sum_{\nu=0}^{d}L_\mu^\nu A_\nu(x) \tag{5.7}$$

が成り立つ．これが電磁ポテンシャル $A(x)$ の座標変換の公式である (ただし，x は V_{M} の点であり，座標ではないことに注意)．だが，ここでも，念のために注意をしておけば，(5.7) は，あくまで，1 つの対象 $A(x)$ の 2 つの線形座標系での座標表示の変換式であって，$A(x)$ が変わるということではないということである．

5.3 古典電磁気学の基礎方程式

電磁現象は電荷または電流の存在によって引き起こされる．すでに指摘したように，電荷と電流は，それぞれでは絶対的な意味を持たず，相対的である．だが，それらは $(d+1)$ **次元電流密度**と呼ばれる絶対的な量の分節として捉えられる．この絶対的な量は，数学的には，電磁ポテンシャル A と同様，V_{M} 上の 1 次微分形式によって記述される．これを $J:V_{\mathrm{M}}\longrightarrow V_{\mathrm{M}}^*$ とする．$\{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ を V_{M} の任意の基底とし，その双対基底を $\{\phi^\mu\}_{\mu=0}^d$ とするとき

$$J(x)=\sum_{\mu=0}^{d}J_\mu(x)\phi^\mu,\quad x\in V_{\mathrm{M}} \tag{5.8}$$

と展開できる $(J_\mu(x)\in\mathbb{R})$．$\{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ がローレンツ基底の場合には，各成分 $J_\mu(x)$ は次のような物理的解釈を持つ：ローレンツ座標系 $(V_{\mathrm{M}},\{e_\mu\}_{\mu=0}^d)$ の空間座標における**電荷密度** (単位体積あたりの電気量) を $\rho(x)\geq 0$, d **次元電流密度** (単位面積を単位時間あたりに貫く電流) を $(j^1(x), j^2(x),\cdots,j^d(x))\in\mathbb{R}^d$ とすれば

$$J_0(x)=\frac{\rho(x)}{c\varepsilon_0},\quad J_i(x)=-\frac{j^i(x)}{c^2\varepsilon_0},\quad i=1,\cdots,d. \tag{5.9}$$

ただし，ε_0 は真空中の誘電率と呼ばれる物理定数，c は光速である (第 2 式の右辺のマイナス符号に注意).

電磁現象の生成の仕方を原理的に統制する古典電磁気学の基礎方程式 — 電磁ポテンシャルに対する運動方程式 — を書き下すために，いくつか記号を導入する．$x=\sum_{\mu=0}^{d} x^\mu e_\mu$ とするとき，x^μ に関する偏微分作用素を ∂_μ と記す：

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{5.10}$$

各 μ に対して，$x_\mu \in \mathbb{R}$ を

$$x_\mu := \sum_{\nu=0}^{d} \eta_{\mu\nu} x^\nu \tag{5.11}$$

によって定義し

$$\partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{5.12}$$

とおく．したがって

$$\partial^\mu = \sum_{\nu=0}^{d} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu. \tag{5.13}$$

注意 5.3 x_μ の意味は次の通りである．V_{M}^* のベクトル $\tilde{x}$ を $\tilde{x}:=\sum_{\mu=0}^{d} x_\mu \phi^\mu$ によって定義すれば，$i_*(\tilde{x})=x$ が成り立つ．ただし，i_* は V_{M}^* から V_{M} への標準的な同型写像である (付録 C.6 を参照)．つまり，(x_μ) は，$i_*^{-1}(x)\in V_{\mathrm{M}}^*$ の成分表示なのである．平たくいえば，V_{M} のベクトル x の成分の添字を下げて得られる数は，x に対応する，双対空間 V_{M}^* のベクトルの双対基底に関する成分なのである．

電磁ポテンシャル A に対して，スカラー場 $\mathrm{Div}\, A : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$(\mathrm{Div}\, A)(x) := \sum_{\mu=0}^{d} \partial^\mu A_\mu(x) \tag{5.14}$$

によって定義する．右辺は基底 (ローレンツ基底とは限らない) の取り方によらないことが次のようにして証明される．実際，$x_\mu = \sum_{\nu=0}^{d} (L^{-1})^\nu_\mu x'_\nu$ であるから

$$\partial^{\mu\prime} := \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \sum_{\nu=0}^{d} (L^{-1})^\mu_\nu \partial^\nu. \tag{5.15}$$

これと (5.7) を用いると

$$\sum_{\mu=0}^{d} \partial^{\mu\prime} A_\mu(x)' = \sum_{\nu,\lambda=0}^{d} \left(\sum_{\mu=0}^{d} (L^{-1})^\mu_\nu L^\lambda_\mu \right) \partial^\nu A_\lambda(x)$$

$$= \sum_{\nu,\lambda=0}^{d} \delta^\lambda_\nu \partial^\nu A_\lambda(x)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{d} \partial^\nu A_\nu(x).$$

$\mathrm{Div}\, A$ を A の $(d+1)$ **次元的発散**と呼ぶ.

$g_{\mu\nu} = \langle e_\mu, e_\nu \rangle$ とし，行列 $g = (g_{\mu\nu})$ の逆行列 g^{-1} の (μ,ν) 成分を $g^{\mu\nu}$ と記す：

$$g^{\mu\nu} := (g^{-1})^{\mu\nu}. \tag{5.16}$$

$\{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ がローレンツ基底ならば $g = \eta$. したがって，$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ である.

偏微分作用素 $\Box$ を

$$\Box := \sum_{\mu,\nu=0}^{d} g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \tag{5.17}$$

によって定義する．座標変換公式

$$x^\mu = \sum_{\nu=0}^{d} L^\mu_\nu x^{\nu\prime}. \tag{5.18}$$

から容易に導かれる式

$$\partial_\mu{}' := \frac{\partial}{\partial x^{\mu\prime}} = \sum_{\nu=0}^{d} L^\nu_\mu \partial_\nu \tag{5.19}$$

を用いると，$\Box$ は基底 $\{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ の取り方によらないことが示される (問題 1)．$\Box$ を $(d+1)$ 次元の**ダランベールシャン**と呼ぶ.

$\{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ がローレンツ基底の場合には $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ であるので

$$\Box = \partial_0^2 - \sum_{i=1}^{d} \partial_i^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \right)^2 - \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^2 \tag{5.20}$$

という形をとる.

以上の準備のもとで，**古典電磁気学の基礎方程式**を書き下すことができる．すなわち，次の方程式がそれである (A は 2 回連続微分可能であると仮定する*2)：

$$\Box A_\mu(x) - \partial_\mu(\mathrm{Div}\, A(x)) = J_\mu(x), \quad \mu = 0, 1, \cdots, d. \tag{5.21}$$

これは，線形座標系 $(V_\mathrm{M}, \{e_\mu\}_{\mu=0}^d)$ での表示であるが，上述のことから，その取

*2 以下，特に断らない限り，解析的な対象に対しては，必要な微分可能性はつねに仮定されているとする.

り方によらないことがわかる．(5.21) を座標を用いない絶対的な形式で表せば

$$\Box A - d(\mathrm{Div}\, A) = J \tag{5.22}$$

という簡潔な形になる．ただし，$d(\mathrm{Div}\, A)$ はスカラー場 $\mathrm{Div}\, A$ の微分である (付録 D, D.4.1 項を参照).

(5.22) において $J=0$ として得られる方程式

$$\Box A - d(\mathrm{Div} A) = 0 \tag{5.23}$$

の解を**自由な電磁ポテンシャル**と呼ぶ．(5.23) を電磁ポテンシャルに関する**自由場の方程式**ともいう．

例 5.4 $a, b \in V_{\mathrm{M}}^*, k \in V_{\mathrm{M}}$ は，$\langle k, k\rangle = 0, a(k) = 0, b(k) = 0$ を満たすものとする．このとき

$$A(x) := a\cos\langle k, x\rangle + b\sin\langle k, x\rangle, \quad x \in V_{\mathrm{M}}$$

で定義される 1 次微分形式 A は自由な電磁ポテンシャルである．すなわち，(5.23) の解である (問題 2)．この型の電磁ポテンシャルを**平面波型電磁ポテンシャル**あるいは単に**平面波**という．

問題 5 で見るように，一般の自由な電磁ポテンシャルは，平面波の重ね合わせとして表される．つまり，自由な電磁ポテンシャルは波動を表す．詳細は略すが，$J \neq 0$ の場合にも古典電磁気学の基礎方程式は波動を記述する解を持つことが示される．この種の波動を，後に記述する電磁場のレヴェルで捉えたものが，いわゆる**電磁波**である．本書では割愛せざるを得ないが，全宇宙に満ちる光は，古典電磁気学的現象領域においては，電磁波の一形態であることが示される．

5.4 基礎方程式の解空間のローレンツ対称性

古典電磁気学の基礎方程式 (5.22) を満たす電磁ポテンシャル A をこの方程式の解と呼ぶ．基礎方程式 (5.22) の解の全体を $\mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}$ としよう[*3]:

$$\mathfrak{S}_{\mathrm{EM}} := \{A : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow V_{\mathrm{M}}^* \mid A \text{ は (5.22) の解}\}. \tag{5.24}$$

この集合のローレンツ写像に関する対称性 — ローレンツ対称性 — を考察するために，写像 $K : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow V_{\mathrm{M}}^*$ とローレンツ写像 $\Lambda : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow V_{\mathrm{M}}$ に対して，K^{Λ} を

[*3]「EM」は「電磁的」(electromagnetic) の意.

$$K^\Lambda(x) := \Lambda K(\Lambda^{-1}x), \quad x \in V_{\mathrm{M}} \tag{5.25}$$

によって定義する．K^Λ を K の Λ **変換**と呼ぶ．もし $K = K^\Lambda$ ならば，K は Λ **対称**であるという．

定理 5.5 $(d+1)$ 次元電流密度 J は Λ 対称であるとする：$J^\Lambda = J$. このとき，$A \in \mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}$ ならば $A^\Lambda, A^{\Lambda^{-1}} \in \mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}$ である．

証明 $X = \Lambda^{-1}x$ とし，$B(x) := A(X)$ とおく．$\{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ をローレンツ基底とし，$x = \sum_{\mu=0}^d x^\mu e_\mu$ と展開する．$f_\mu = \Lambda^{-1}e_\mu$ とおくと，ミンコフスキー計量のローレンツ不変性により $\{f_\mu\}_\mu$ もローレンツ基底であることがわかる．$F = \{f_\mu\}_\mu$ とおく．$X = \sum_{\mu=0}^d x^\mu f_\mu$ となるから，ベクトル X のローレンツ座標系 $(V_{\mathrm{M}}, \{f_\mu\}_\mu)$ での座標表示は (x^μ) である．また，Λ^{-1} の基底 $\{e_\mu\}_\mu$ に関する行列表示を $(\Lambda^{-1})^\nu_\mu$ とすれば，$f_\mu = \sum_{\nu=0}^d (\Lambda^{-1})^\nu_\mu e_\nu$ であるから，$X = \sum_{\mu=0}^d X^\mu e_\mu$ とも書ける．ただし，$X^\mu = \sum_{\nu=0}^d (\Lambda^{-1})^\mu_\nu x^\nu$. したがって，$X$ のローレンツ座標系 $(V_{\mathrm{M}}, \{e_\mu\}_\mu)$ における座標表示は (X^μ) である．変数 (x^μ) に関するダランベールシャンを $\square_E$, 変数 (X^μ) に関するダランベールシャンを $\square_F$ とすれば，すでに見たように，$\square = \square_E = \square_F$ [$((\Lambda^{-1})^\nu_\mu)$ はローレンツ行列であることに注意；4.3.1 項を参照] であるから

$$\square B(x) = (\square_F A)(X).$$

仮定により

$$(\square_F A)(X) = J(X) + (d(\mathrm{Div}\, A))(X).$$

$d\mathrm{Div} A$ も基底の取り方によらないから，$(d(\mathrm{Div}\, A))(X) = (d(\mathrm{Div}\, B))(x)$. したがって

$$\square B(x) - (d(\mathrm{Div}\, B))(x) = J(\Lambda^{-1}x).$$

左から Λ を作用させ，J に対する仮定を用いると

$$\square A^\Lambda - d(\mathrm{Div}\, A^\Lambda) = J$$

が得られる．したがって，$A^\Lambda \in \mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}$.

J が Λ 対称であれば，それは Λ^{-1} 対称でもある．したがって，前段の結果により，$A^{\Lambda^{-1}} \in \mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}$. ■

この定理の意味を対称性の観点から明晰に捉えるために，V_{M} から V_{M}^* への連続微分可能な写像の全体 (= 電磁ポテンシャルの全体) を考え，これを $A^1(V_{\mathrm{M}})$ と記す．これはベクトル空間 V_{M}^* に値をとる写像の空間であるから，ベクトル値関数の和とスカラー倍の演算に関して，実ベクトル空間である (付録B, 例B.3を参照)．各ローレンツ写像 Λ に対して $A^1(V_{\mathrm{M}})$ 上の写像 $\rho(\Lambda)$ を

$$\rho(\Lambda)A := A^{\Lambda} \tag{5.26}$$

によって定義すれば，これは明らかに線形作用素である．さらに，次の事実が成り立つ：

命題 5.6 任意のローレンツ写像 $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ に対して

$$\rho(\Lambda_1)\rho(\Lambda_2) = \rho(\Lambda_1\Lambda_2). \tag{5.27}$$

すなわち，対応 $\rho : \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}}) \ni \Lambda \longmapsto \rho(\Lambda)$ は，ローレンツ写像群 $\mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ の $A^1(V_{\mathrm{M}})$ 上での表現である．

証明 次の計算による：任意の $x \in V_{\mathrm{M}}$ に対して

$$\begin{aligned}(\rho(\Lambda_1)\rho(\Lambda_2)A)(x) &= \Lambda_1(\rho(\Lambda_2)A)(\Lambda_1^{-1}x) = \Lambda_1\Lambda_2 A(\Lambda_2^{-1}\Lambda_1^{-1}x)\\ &= \Lambda_1\Lambda_2 A((\Lambda_1\Lambda_2)^{-1}x).\end{aligned}$$

■

系 5.7 $\Lambda \in \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ に対して，J は Λ 対称であるとする．このとき，$\rho(\Lambda)(\mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}) = \mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}$．すなわち，解空間 $\mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}$ は $\rho(\Lambda)$ 対称である．

証明 定理5.5より $\rho(\Lambda)(\mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}) \subset \mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}$．逆に，任意の $A \in \mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}$ に対して $B = \rho(\Lambda^{-1})A$ とすれば，定理5.5により $B \in \mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}$ であり，(5.27) によって，$\rho(\Lambda)B = A$. したがって，$\mathfrak{S}_{\mathrm{EM}} \subset \rho(\Lambda)(\mathfrak{S}_{\mathrm{EM}})$. ■

5.5 電磁場テンソル

$\overset{2}{\wedge} V_{\mathrm{M}}^*$ を V_{M}^* に関する2階反対称テンソルの空間とする (付録E, E.3節を参照．そこでのVとして V_{M} をとる)．$\{\phi^\mu\}_{\mu=0,1,\cdots,d}$ を V_{M}^* の任意の基底とする．電磁ポテンシャル A から，写像 $dA : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \overset{2}{\wedge} V_{\mathrm{M}}^*$ を

$$(dA)(x) := \sum_{\mu=0}^{d} (dA_\mu)(x) \wedge \phi^\mu \tag{5.28}$$

によって定義する．ただし，dA_μ はスカラー場 $A_\mu : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto A_\mu(x)$ の微分形式である (付録 D, D.4.1 項を参照)．dA を A の**外微分**と呼ぶ．

定義 (5.28) は基底の取り方によらないことが次のようにしてわかる．まず，スカラー場の微分形式の定義とその成分表示によって

$$dA_\mu(x) = \sum_{\nu=0}^{d} \partial_\nu A_\mu(x) \phi^\nu. \tag{5.29}$$

したがって

$$(dA)(x) = \sum_{\mu,\nu=0}^{d} \partial_\nu A_\mu(x) \phi^\nu \wedge \phi^\mu. \tag{5.30}$$

(5.19) と (5.6) および (5.7) によって

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{d} \partial'_\nu A_\mu(x)' \phi^{\nu\prime} \wedge \phi^{\mu\prime} = \sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu,\lambda,\rho=0}^{d} L_\nu^\alpha L_\mu^\beta (L^{-1})_\lambda^\nu (L^{-1})_\rho^\mu \partial_\alpha A_\beta(x) \phi^\lambda \wedge \phi^\rho.$$

そこで，$\sum_{\nu=0}^{d} L_\nu^\alpha (L^{-1})_\lambda^\nu = \delta_\lambda^\alpha$ を用いると，右辺は (5.30) の右辺に等しいことがわかる．よって，dA は基底の取り方によらずに定義される絶対的対象である．

電磁ポテンシャル A から自然な仕方で定まる 2 階反対称テンソル

$$F(A) := dA \tag{5.31}$$

を**電磁場テンソル**または単に**電磁場**と呼ぶ．このテンソルは，電場と磁場の概念を内蔵している．逆にいえば，それは電場と磁場の統一的理念なのである．この点については，次の節でややくわしく論じる．

付録 E の一般論を応用すれば $\{\phi^\mu \wedge \phi^\nu \,|\, 0 \le \mu < \nu \le d\}$ は $\bigwedge^2 V_{\mathrm{M}}^*$ の基底である．そこで，(5.30) と $\phi^\mu \wedge \phi^\nu = -\phi^\nu \wedge \phi^\mu$ に注意して，$F(A)$ を次のように書き換える：

$$F(A) = \sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu}(x) \phi^\mu \wedge \phi^\nu. \tag{5.32}$$

ただし

$$F_{\mu\nu}(x) := \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x). \tag{5.33}$$

したがって，$(F_{\mu\nu})_{\mu<\nu}$ が電磁場テンソル $F(A)$ の基底 $\{\phi^\mu \wedge \phi^\nu \,|\, 0 \le \mu < \nu \le d\}$ に関する成分表示である．容易にわかるように

$$F_{\mu\nu}(x) = -F_{\nu\mu}(x) \tag{5.34}$$

が成り立つ．すなわち，電磁場テンソルの成分は，その添字に関して反対称である．これを用いると (5.32) は

$$F(A)=\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=0}^{d} F_{\mu\nu}(x)\phi^{\mu}\wedge\phi^{\nu} \tag{5.35}$$

と書きなおせる．

(5.21) から

$$\sum_{\mu=0}^{d} \partial^{\mu} F_{\mu\nu}(x)=J_{\nu}(x), \quad \nu=0,1,\cdots,d \tag{5.36}$$

がしたがう．また，直接計算により，巡回的関係式

$$\partial_{\lambda}F_{\mu\nu}+\partial_{\mu}F_{\nu\lambda}+\partial_{\nu}F_{\lambda\mu}(x)=0, \quad \lambda,\mu,\nu=0,1,\cdots,d \tag{5.37}$$

が成り立つことがわかる．連立偏微分方程式 (5.36), (5.37) は，**電磁場テンソルの成分に対する運動方程式**である*4．

5.6 電場と磁場の発現およびマクスウェル方程式

さて，先に予告しておいたように，電磁ポテンシャルから電場や磁場が "分節" として現れてくることを示そう．$E=\{e_\mu\}_{\mu=0}^{d}$ を V_{M} のローレンツ基底とする．

2階反対称テンソルの空間 $\overset{2}{\wedge} V_{\mathrm{M}}^{*}$ の次元は ${}_{d+1}C_2=(d+1)d/2$ であるから，電磁場テンソルの独立な成分は $(d+1)d/2$ 個である．そこで，電磁場テンソルの独立な成分として $I_F:=\{F_{\mu\nu}|0\leq\mu<\nu\leq d\}$ をとる ((5.34) に注意)．時空の時間と空間への分離に呼応させて，集合 I_F を $\{F_{0j}\}_{j=1}^{d}$ と $\{F_{ij}|1\leq i<j\leq d\}$ という 2 つの部分に分けて考えるのは自然である．するとまず前者から

$$E^{j}(x):=cF_{0j}(x), \quad j=1,\cdots,d \tag{5.38}$$

という量が定義される．これを 1 つのベクトル値関数の成分として捉えるために，$e_1,\cdots,e_d$ によって生成される部分空間を S_{M} とし，その計量を

$$\langle x,y\rangle_{S_{\mathrm{M}}}:=-\langle x,y\rangle, \quad x,y\in S_{\mathrm{M}} \tag{5.39}$$

によって定義する．このとき，S_{M} は d 次元のユークリッドベクトル空間である．S_{M} の元としての e_i を $\hat{e}_i$ と記す．このとき，$\{\hat{e}_j\}_{j=1}^{d}$ は S_{M} の正規直交基底であ

---

*4 これも微分形式の理論を使えば，座標系に言及することなく，絶対的な仕方で，非常に単純で美しい形に表すことができる．拙著『物理現象の数学的諸原理』(共立出版，2003) の p.332 の式 (7.102) を参照されたい．

る．そこで，S_{M} 値関数 $\boldsymbol{E}:V_{\mathrm{M}}\longrightarrow S_{\mathrm{M}}$ を

$$\boldsymbol{E}(x):=\sum_{j=1}^{d}E^j(x)\hat{e}_j \tag{5.40}$$

によって定義する．もちろん，これは，ローレンツ基底 $E=\{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ の取り方に依存して決まるベクトル値関数である．

$\boldsymbol{E}(x)$ が満たす偏微分方程式を見出すために，その d 次元的発散

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}(x):=\sum_{j=1}^{d}\partial_j E^j(x)$$

を計算してみよう．F_{0j} の定義によって

$$\sum_{j=1}^{d}\partial_j E^j(x)=c\partial_0\left(\sum_{j=1}^{d}\partial_j A_j(x)\right)-c\sum_{j=1}^{d}\partial_j^2 A_0.$$

(5.21) によって，右辺は $cJ_0(x)$ に等しいことがわかる ($\partial_j=-\partial^j$ $(j=1,\cdots,d)$ に注意)．したがって，(5.9) の第 1 式により

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}(x)=\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}. \tag{5.41}$$

この関係式は，$d=3$ の場合，電荷分布によってできる電場と電荷密度の関係を表す式に他ならず，実験的には**ガウスの法則**として知られているものである．ゆえに，$\boldsymbol{E}$ は**電場**を表すと解釈される．

そこで，残りの独立成分 $\{F_{ij}\,|\,1\le i<j\le d\}$ は磁場の成分を表すと解釈し (この解釈の妥当性は以下の理論の展開によって示される)，さらに，磁場も電場と同じく d 次元ベクトルであると仮定する．すると，$\{F_{ij}\,|\,1\le i<j\le d\}$ の元の個数 (濃度) は $d(d-1)/2$ であるから $d(d-1)/2=d$ でなければならない．これは

$$d=3$$

を意味する．したがって，時空の次元は 4 でなければならない．こうして，**時空の 4 次元性に対する 1 つの構造的な起源**が明らかにされる．

以下，この節を通して，V_{M} は 4 次元ミンコフスキーベクトル空間であるとする．上述のことから，磁場の成分 (B^1,B^2,B^3) を次のように定義する：

$$B^1:=-F_{23},\quad B^2:=-F_{31},\quad B^3:=-F_{12}. \tag{5.42}$$

磁場は S_{M} 値関数として

$$\boldsymbol{B}(x):=\sum_{i=1}^{3}B^i\hat{e}_i \tag{5.43}$$

によって定義する．このとき，(5.37) によって

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}(x)=0 \tag{5.44}$$

が示される．これは，“磁荷” が単独では存在しないという，磁気に関わる現象的事実にかなうものである．

次に電場と磁場の時間変化を調べよう．ローレンツ座標系 (V_{M},E) での時間座標 t は，$x=\sum_{\mu=0}^{3}x^\mu e_\mu$ と展開するとき

$$t=\frac{x^0}{c} \tag{5.45}$$

によって定義された (第4章，4.2.3 項)．したがって

$$\frac{\partial}{\partial t}=c\partial_0. \tag{5.46}$$

ゆえに

$$\frac{\partial E^i(x)}{\partial t}=c^2\partial_0F_{0i}(x)=c^2(\partial_0^2A_i(x)-\partial_i\partial_0A_0(x)).$$

(5.21) により

$$\partial_0^2A_i(x)=J_i(x)+\sum_{j=1}^{3}\partial_j^2A_i(x)+\partial_i\sum_{\mu=0}^{3}\partial^\mu A_\mu(x).$$

これを上式の右辺に代入すれば — $\partial^k=-\partial_k$ $(k=1,2,3)$ に注意して —

$$\frac{\partial E^i(x)}{\partial t}=c^2J_i(x)+c^2\sum_{j\neq i}\partial_j(\partial_jA_i(x)-\partial_iA_j(x))$$

を得る．これを $i=1,2,3$ ごとに書き下せば

$$\frac{\partial E^1(x)}{\partial t}=c^2J_1(x)+c^2(\partial_2B^3(x)-\partial_3B^2(x)), \tag{5.47}$$

$$\frac{\partial E^2(x)}{\partial t}=c^2J_2+c^2(\partial_3B^1(x)-\partial_1B^3(x)), \tag{5.48}$$

$$\frac{\partial E^3(x)}{\partial t}=c^2J_3+c^2(\partial_1B^2(x)-\partial_2B^1(x)) \tag{5.49}$$

となる．この式をベクトル場の方程式として書きなおすために2つのベクトル場 $\mathrm{J},\operatorname{rot}\boldsymbol{B}:V_{\mathrm{M}}\longrightarrow S_{\mathrm{M}}$ を次のように定義する：

$$\mathrm{J}(x):=\sum_{i=1}^{3}j^i(x)\hat{e}_i, \tag{5.50}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B}(x):=(\partial_2B^3(x)-\partial_3B^2(x))\hat{e}_1+(\partial_3B^1(x)-\partial_1B^3(x))\hat{e}_2$$

$$+(\partial_1 B^2(x) - \partial_2 B^1(x))\hat{e}_3. \tag{5.51}$$

ベクトル場 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$ はベクトル場 $\boldsymbol{B}$ の**回転**と呼ばれる．このとき，連立偏微分方程式 (5.47)〜(5.49) はベクトル場に関する 1 つの方程式

$$c^2 \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}(x) = \frac{\mathrm{J}(x)}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \boldsymbol{E}(x)}{\partial t} \tag{5.52}$$

として表される．これは，電場の時間的変化と 3 次元的電流密度 J および磁場 $\boldsymbol{B}$ の間の根源的関係を示すものである．

磁場 $\boldsymbol{B}$ の時間微分については，まず

$$\frac{\partial B^1(x)}{\partial t} = -c\partial_0 F_{23}(x). \tag{5.53}$$

そこで，(5.37) を使えば，右辺は $-(\partial_2 E^3(x) - \partial_3 E^2(x))$ に等しいことがわかる．他の成分についても同様で次の結果が得られる：

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(x) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(x)}{\partial t}. \tag{5.54}$$

だたし，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}$ は，(5.51) の右辺で，$B^i(x)$ を $E^i(x)$ で置換えて定義されるベクトル場である．

こうして，電場と磁場に関する運動方程式が導かれる．たいへん美しい形をした連立偏微分方程式 (5.41), (5.44), (5.52), (5.54) は，通常，**マクスウェル方程式**と呼ばれる．これは，電場，磁場，電荷密度，電流密度を用いて表した古典電磁気学の基礎方程式である．古典電磁気学が対象とする電磁現象の総体は (潜在的・可能的なもの，未発現のものも含む)，マクスウェル方程式 — 荷電粒子の運動も関与する場合には，粒子の運動方程式とマクスウェル方程式からなる連立方程式 — の解の全体と照応する．

注意 5.8 上述の導出から明らかなように，電場と磁場は，電磁場テンソルの成分からつくられるベクトル場 — 値を 3 次元ベクトル空間 S_M にとるベクトル場 — であり，S_M もローレンツ座標系 (観測系) の取り方に依存しているので，ミンコフスキーベクトル空間に関わる絶対的な量ではなく，あくまでも相対的な量である．同一の物理系において，ローレンツ座標系の取り方に応じて，電場や磁場があったりなかったりするのはそのためであり，これは，相対論的観点からはごく自然なことなのである．

5.7　ゲージ対称性

再び，$(d+1)$ 次元のミンコフスキーベクトル空間 V_{M} にもどる．電磁場テンソルの定義から明らかなように，電磁場テンソルは，電磁ポテンシャル A を 1 つ決めれば 1 つ定まる．では，この対応は 1 対 1 であろうか．次にこの問題を考察する．

まず，特殊な電磁ポテンシャルを考える．$\Lambda : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{R}$ を 2 回連続微分可能な任意のスカラー場としよう．このとき，その微分 $d\Lambda$ は電磁ポテンシャルである．これに関して次の事実が成立する：

補題 5.9　$d(d\Lambda)=0.$

証明　$d\Lambda=\sum_{\mu=0}^{d}\partial_\mu\Lambda\phi^\mu$ であるから

$$d(d\Lambda)=\sum_{\mu<\nu}\{\partial_\mu(\partial_\nu\Lambda)-\partial_\nu(\partial_\mu\Lambda)\}\phi^\mu\wedge\phi^\nu=0. \qquad \blacksquare$$

この補題は，$A=d\Lambda$ の場合の電磁場テンソル $F(d\Lambda)$ が 0 であることを語る．すなわち，電磁場テンソルが 0 となる電磁ポテンシャルが存在するということである．したがって

$$A_\Lambda := A - d\Lambda$$

とおけば

$$F(A_\Lambda)=F(A) \tag{5.55}$$

が成り立つ．こうして，電磁ポテンシャルと電磁場テンソルの対応は 1 対 1 ではないことがわかる．

そこで，次に，この非 1 対 1 性の構造を明らかにすることを考える．すなわち，2 つの電磁ポテンシャル A, C が $F(A)=F(C)$ を満たすとき，A と C はいかなる関係にあるかを調べるのである．$F(A)=F(C)$ は $d(A-C)=0$ と同値なので，問題は

$$dX=0 \tag{5.56}$$

を満たす電磁ポテンシャル X の形を決定することである．この方程式に関して次の補題が成り立つ：

補題 5.10 (ポアンカレの補題)　X を連続微分可能な電磁ポテンシャルで (5.56) を満たすものとする．このとき，連続微分可能なスカラー場 $\Lambda : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在

して

$$X = d\Lambda \tag{5.57}$$

と表される．

証明 $x = \sum_{\mu=0}^{d} x^\mu e_\mu \in V_{\mathrm{M}}, X(x) = \sum_{\mu=0}^{d} X_\mu(x)\phi^\mu$ と展開し，天下り的だが，スカラー場 $\Lambda : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\Lambda(x) := \int_0^1 \left(\sum_{\mu=0}^{d} x^\mu X_\mu(tx) \right) dt$$

によって定義する．X_μ は連続微分可能であるから，Λ もそうであることがわかる．仮定 (5.56) により，$\partial_\mu X_\nu = \partial_\mu X_\nu \cdots (*)$. 微分の定義から

$$(d\Lambda)(x) = \sum_{\nu=0}^{d} \left\{ \int_0^1 \partial_\nu \left(\sum_{\mu=0}^{d} x^\mu X_\mu(tx) \right) dt \right\} \phi^\nu.$$

右辺を計算し，$(*)$ を用いることにより

$$\begin{aligned}(d\Lambda)(x) &= \sum_{\nu=0}^{d} \left(\int_0^1 X_\nu(tx)\, dt \right) \phi^\nu \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{d} \left\{ \int_0^1 \left(\sum_{\mu=0}^{d} tx^\mu (\partial_\mu X_\nu)(tx) \right) dt \right\} \phi^\nu \end{aligned} \tag{5.58}$$

が得られる．他方，合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dt} tX(tx) = X(tx) + t \sum_{\mu,\nu=0}^{d} x^\mu (\partial_\mu X_\nu)(tx) \phi^\nu.$$

この両辺を t について 0 から 1 まで積分すれば，左辺 $= X(x)$ で右辺は (5.58) の右辺に等しいことがわかる．したがって，$X(x) = d\Lambda(x)$. ■

上の補題から，ただちに次の定理が得られる：

定理 5.11 連続微分可能な 2 つの電磁ポテンシャル A, C について，$F(A) = F(C)$ であるための必要十分条件は，ある連続微分可能なスカラー場 $\Lambda : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$C = A - d\Lambda \tag{5.59}$$

が成り立つことである．

証明 十分性はすでに示したので，必要性だけを示す．$F(A) = F(C)$ ならば $d(A - C) = 0$ であるから，上述のポアンカレの補題により，$A - C = d\Lambda$ となるスカラー場 Λ がある． ■

いままでの議論を注視すると，電磁ポテンシャルの空間 $A^1(V_{\mathrm{M}})$ 上に，ある特徴的な写像が働いていることに気付く．すなわち，連続微分可能なスカラー場 Λ: $V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$G_\Lambda(A) := A - d\Lambda, \quad A \in A^1(V_{\mathrm{M}}) \tag{5.60}$$

によって定義される写像 $G_\Lambda : A^1(V_{\mathrm{M}}) \longrightarrow A^1(V_{\mathrm{M}})$ である．この写像を**ゲージ変換**と呼ぶ．この場合，Λ を**ゲージ関数**という．

(5.60) をローレンツ座標系 (V_{M}, E) $(E = \{e_\mu\}_{\mu=0}^d)$ における成分表示で書けば，$\widetilde{A} = G_\Lambda(A)$ とするとき

$$\widetilde{A}_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda \tag{5.61}$$

となる．ただし，$x = \sum_{\mu=0}^d x^\mu e_\mu, A(x) = \sum_{\mu=0}^d A_\mu(x)\phi^\mu, \widetilde{A}(x) = \sum_{\mu=0}^d \widetilde{A}_\mu(x)\phi^\mu$ $(\{\phi^\mu\}_{\mu=0}^d$ は E の双対基底)．しかし，(5.60) は線形座標系の取り方によらない絶対的な表し方であるので，一般論においては，こちらを用いて論を進める方が，座標表示を用いる場合よりも，認識の普遍性と明晰度はより高いということを強調しておく．

(5.55) によって，任意のゲージ関数 Λ に対して

$$F(G_\Lambda(A)) = F(A). \tag{5.62}$$

すなわち，電磁場テンソルは，ゲージ変換のもとで不変である．

一般に，電磁ポテンシャル A から決まるテンソル量 $f(A)$ (スカラーは 0 階のテンソル，ベクトルは 1 階のテンソルと見る) が，任意のゲージ関数 Λ に対して $f(G_\Lambda(A)) = f(A)$ を満たすとき，f は**ゲージ不変性**または**ゲージ対称性**を持つという．

電磁場テンソルはゲージ対称性を持つテンソルの例の 1 つなのである．

古典電磁気学の基礎方程式は，電磁ポテンシャルと $(d+1)$ 次元電流密度 J を用いて定義されているので，J がゲージ対称性を持てば，古典電磁気学は理論全体としてゲージ対称であること (つまり，物理的な結果は，ゲージ変換で移りあう電磁ポテンシャルの取り方によらないということ) が結論される．これを**古典電磁気学のゲージ対称性**と呼ぶ．

ゲージ関数の任意性の意味について考察しよう．そのために，集合 $A^1(V_{\mathrm{M}})$ の中にある関係を導入する．すなわち，2 つの電磁ポテンシャル $A, C \in A^1(V_{\mathrm{M}})$ に対して，関係 $A \sim C$ を「あるスカラー場 Λ が存在して $C = A - d\Lambda$ が成り立つこと」(いいかえれば，C は A のゲージ変換になっているということ) によって定義

する．この関係は同値関係であることがわかる．実際，まず，$A \sim A$ (反射律) は自明である ($\Lambda = 0$ にとればよい)．$A \sim C$ ならば $A = C - (d(-\Lambda))$ が成り立つので $C \sim A$ である．すなわち，対称律も成り立つ．さらに，$A \sim C, C \sim D \in A^1(V_{\rm M})$ ならば $D = C - dL$ となるスカラー場 L がある．したがって，$D = A - d(\Lambda + L)$．ゆえに $A \sim D$．すなわち，推移律も成立する．

そこで，$A^1(V_{\rm M})$ を関係 $\sim$ によって同値類に類別しよう．電磁ポテンシャル A の属する同値類を $[A]$ で表す．定理 5.11 は次のようにいいかえられる：

系 5.12 $A, C \in A^1(V_{\rm M})$ について，$F(A) = F(C)$ であるための必要十分条件は $[A] = [C]$ である．

こうして，電磁ポテンシャルの同値類と電磁場テンソルが 1 対 1 に対応することがわかる．したがって，電磁現象の物理の違いは，電磁ポテンシャルのレヴェルでは，個々の電磁ポテンシャルではなく，電磁ポテンシャルの同値類によって区別される．この認識は，特に，自然哲学的に重要である．古典電磁気学によって記述される電磁現象にとっては，個々の電磁ポテンシャルではなく，**電磁ポテンシャルの同値類が本質的・根源的な対象なのである．**

5.8 ゲージ条件

ゲージ対称性により，基礎方程式 (5.21) を解く際に，電磁ポテンシャル A に対して適当な条件をつけることが可能である．

5.8.1 ローレンツ条件

基礎方程式 (5.21) の観点からは，A に対する条件で，ある意味で自然なのは

$$\mathrm{Div}\, A = 0 \tag{5.63}$$

という条件である．これは線形座標系の取り方によらない絶対的な関係式である．さらに，この場合，(5.21) は

$$\Box A_\mu = J_\mu \tag{5.64}$$

というより簡潔で美しい形になる．

(5.64) 型の偏微分方程式は**波動方程式**と呼ばれる．特に，$J = 0$ の波動方程式を**自由な波動方程式**という．

条件 (5.63) を**ローレンツ条件**と呼ぶ．この条件を課すことは，ゲージ変換の任

意性をより小さくしていることが次のようにしてわかる．Λ をゲージ関数とし

$$A' = A - d\Lambda$$

とすると

$$\mathrm{Div}\, A' = -\sum_{\mu=0}^{d} \partial^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda$$

であり，右辺は $-\Box\Lambda$ に等しい．したがって，A' がローレンツ条件を満たすための必要十分条件は

$$\Box\Lambda = 0 \tag{5.65}$$

であることが結論される．つまり，ローレンツ条件を課した場合には，ゲージ変換を与えるゲージ関数は自由な波動方程式の解に限られるということである．

ローレンツ条件を課すことに対して,「**ローレンツゲージをとる**」という言い方もなされる．

5.8.2　クーロン条件

ローレンツ座標系 $(V_{\mathrm{M}}, \{e_{\mu}\}_{\mu=0}^{d})$ を 1 つ固定し

$$\sum_{i=1}^{d} \partial_i A_i = 0$$

という条件を考える．これを**クーロン条件**と呼ぶ．したがって，この場合，基礎方程式は，成分ごとに次の形をとる：

$$-\Delta A_0 = J_0, \tag{5.66}$$

$$\Box A_i = J_i, \quad i = 1, \cdots, d. \tag{5.67}$$

ただし，$\Delta = \sum_{i=1}^{d} \partial_i^2$ は d 次元のラプラシアンである．

容易にわかるように，ゲージ変換から得られる電磁ポテンシャル $A' = A - d\Lambda$ がクーロン条件を満たすための必要十分条件は

$$\Delta\Lambda = 0 \tag{5.68}$$

である．

ローレンツ条件の場合と同様，クーロン条件を課すことに対して,「**クーロンゲージをとる**」という言い方もなされる．

クーロン条件は，ローレンツ条件と異なり，ローレンツ座標系に依存した条件であることに注意しよう．

第 5 章の演習問題

1. (5.17) によって定義される偏微分作用素 $\square$ は基底の取り方によらないことを示せ.

2. 例 5.4 で述べられた主張を証明せよ.

3. ゲージ変換の全体 $\Gamma := \{G_\Lambda \mid \Lambda : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{R}$ 連続微分可能 $\}$ は可換群をなすことを示せ.

4. 自由な電磁ポテンシャル全体の集合 (すなわち，方程式 (5.23) の解 A の全体) を $\mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}^0$ とするとき，これは実ベクトル空間であることを示せ.

5. ローレンツ座標系 $(V_{\mathrm{M}}, \{e_\mu\}_{\mu=0}^d)$ を任意に 1 つ固定し，$x \in V_{\mathrm{M}}$ を $x = \sum_{\mu=0}^d x^\mu e_\mu$ と展開する．各 $\boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して，$k \in V_{\mathrm{M}}$ を

$$k = |\boldsymbol{k}| e_0 + \sum_{j=1}^d k_j e_j$$

によって定義する．ただし，$|\boldsymbol{k}| := \sqrt{\sum_{j=1}^d k_j^2}$.

(i) $k \neq 0$ は光的ベクトルであることを示せ.

(ii) 各 $j = 1, \cdots, d$ に対して関数 $a_j : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ を任意に選び，関数 $a_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$a_0(\boldsymbol{k}) := \sum_{j=1}^d a_j(\boldsymbol{k}) \frac{k_j}{|\boldsymbol{k}|}, \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$$

によって定義する．各 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ に対して，関数 $a_\mu^{(\boldsymbol{k})} : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$a_\mu^{(\boldsymbol{k})}(x) := a_\mu(\boldsymbol{k}) e^{i\langle k, x\rangle}, \quad x \in V_{\mathrm{M}}$$

によって定義し (i は虚数単位)

$$A_\mu^{(\boldsymbol{k})}(x) := a_\mu^{(\boldsymbol{k})}(x)^* + a_\mu^{(\boldsymbol{k})}(x)$$

とする．ただし，複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して，z^* は z の共役複素数を表す．このとき

$$\sum_{\mu=0}^d \partial^\mu A_\mu^{(\boldsymbol{k})} = 0, \quad \left(\partial_0^2 - \sum_{j=1}^d \partial_j^2\right) A_\mu^{(\boldsymbol{k})} = 0$$

を示せ.

(iii) 関数 a_i は連続で積分条件

$$\int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\boldsymbol{k})| \, d\boldsymbol{k} < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\boldsymbol{k})| |\boldsymbol{k}|^2 \, d\boldsymbol{k} < \infty, \quad j = 1, \cdots, d,$$

を満たすものとする．このとき

$$A_\mu(x) := \int_{\mathbb{R}^d} A_\mu^{(\boldsymbol{k})}(x)\, d\boldsymbol{k}$$

は 2 回連続微分可能であり

$$\sum_{\mu=0}^{d} \partial^\mu A_\mu = 0, \quad \left(\partial_0^2 - \sum_{j=1}^{d} \partial_j^2\right) A_\mu(x) = 0$$

を満たすことを示せ．

(iv) (iii) の条件のもとで

$$A(x) := \sum_{\mu=0}^{d} A_\mu(x) \phi^\mu$$

($\{\phi^\mu\}$ は $\{e_\mu\}$ の双対基底) と定義すれば，A はローレンツ条件を満たす自由な電磁ポテンシャルであることを示せ．

第6章

物質場とゲージ場

6.1　はじめに

多くの人々にとって，日常的な次元における“物質”に対する表象は，固体状態にある物質の知覚像によるものが基本的であろう．この場合，“物質”は，互いに他から明確に区別され，排斥しあい，何か“硬い”，“相互浸透性”のないものとしてイメージされる．ところで，前章の例 5.4 で述べたように，宇宙を貫いて流れる光は，古典電磁気学が対象とする領域においては，電磁場の波動として記述される．つまり，この現象レヴェルでは，光は波動なのである．ただし，光が通常の物質的波動 (たとえば，水波や音波) と本質的に異なるのは，光が真空中を伝わることからも示唆されるように，光は媒体のない波動だということである[*1]．

アインシュタインの**一般相対性理論**によれば，物質の質量の存在によって生み出される力場である**重力場**も (少なくとも理論的には) ある種の波動を記述することが知られている．

光や重力場が波動であるという性質は，上述の物質像とは対照的である．そこで，この“対立”を統一へともたらすために，日常的な物質像をいったん白紙にもどし，物質も何らかの意味での波動であるという観点に立ったならば，物質的現象界はどのように記述されるか，ということを考えてみる．このような着想は，日常的な知覚や所与の“事実”に固執する人々にとっては，奇異にうつるかもしれないが，より深く洞察する人々にとっては，試してみる価値のある作業仮説なの

[*1] 歴史的には，光の媒体として，“エーテル”なるものが考案されたことがあったが，これは不要なものであることが認識されるいたって，物理学の概念目録からはずされることになった．

だ．というのも，先入観をいっさい捨てて，無心になって世界に向かえば，そもそも物質が“何”であるかは，全然自明ではないことに気付くはずだからである[*2].

物質を何らかの波動として捉えるとき，その波動の場＝**波動場**を当該の物質の**物質場**と呼ぶ．この観点に移行するならば，物質的世界は，物質場，電磁場，重力場という3つの範疇の場を用いて統一的に記述されることになる(物質場は，物質に応じて，いろいろな種類に分かれる)．これらの場を総称的に**古典場**と呼ぶ[*3].

物質場の範疇は時空の取り方に応じて異なる．基本的な範疇は，**非相対論的な場**と**特殊相対論的な場**である．前者は，ニュートン力学的時空上の場であり，後者は，ミンコフスキー時空上の場である[*4]．以下では，特殊相対論的な物質場の典型的な例を取り上げ，それを対称性の観点から考察する．

6.2 クライン–ゴルドン場

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．$(d+1)$ 次元ミンコフスキーベクトル空間 V_{M} 上の $\mathbb{K}$ 値関数，$\phi: V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{K}$ を V_{M} 上の**スカラー場**と呼ぶ．$\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ それぞれの場合に応じて，ϕ を**実スカラー場**，**複素スカラー場**という．実スカラー場は，複素スカラー場の特別な場合(すなわち，その値域が $\mathbb{R}$ におさまる場合) と考えることができるので，以下では，ϕ は複素スカラー場であるとする．

複素スカラー場で記述される物質場の基本的な例の1つは，電荷を持った π 中間子 $\pi^{\pm}$ の対を古典的な波動として捉えた場合の物質場である．他方，実スカラー場については，中性中間子 π^0 に付随する古典的な波動場が基本的な例の1つを提供する．

相対論的な複素スカラー場に対する運動方程式 — **場の方程式** — の一般的な形を書き下すために，複素変数 $z, w \in \mathbb{C}$ の関数

[*2]物質を波とみる物質波の考えは，歴史的には，1923年にフランスの物理学者ド・ブロイ(1892–1987) によって提唱された．

[*3]「古典」とわざわざ修飾語がついているのは，本書ではくわしくふれることができないが，原子や素粒子といった微視的な対象に関わる現象 — 量子現象 — を統一的に記述する根源的対象として，**量子場**と呼ばれるものがあるからである．たとえば，拙著『フォック空間と量子場 (上，下)』(日本評論社，2000)，同『多体系と量子場』(岩波書店，2002) を参照．

[*4]どちらにも属さない中間的な範疇の場の理論としては，たとえば，非相対論的な場と特殊相対論的な場が相互作用を行う系の理論がある．また，一般相対性理論における重力場は，ローレンツ多様体と呼ばれる時空上のテンソル場である．

$$V:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}\,;(z,w)\longmapsto V(z,w)$$

を考える．V は z,w に関して連続微分可能であるとし

$$\frac{\partial V(\phi,\phi^*)}{\partial\phi(x)}:=\left.\frac{\partial V(z,z^*)}{\partial z}\right|_{z=\phi(x)},\quad \frac{\partial V(\phi,\phi^*)}{\partial\phi(x)^*}:=\left.\frac{\partial V(z,z^*)}{\partial z^*}\right|_{z=\phi(x)} \tag{6.1}$$

という記法を導入する (z^* は z の共役複素数)．さらに

$$\left(\frac{\partial V(z,z^*)}{\partial z^*}\right)^*=\frac{\partial V(z,z^*)}{\partial z}$$

が成り立つとする．$M\geq 0$ を定数とする．これらの対象から定まる偏微分方程式

$$\Box\phi(x)+M^2\phi(x)=-\frac{\partial V(\phi,\phi^*)}{\partial\phi(x)^*} \tag{6.2}$$

をクライン (**Klein**)–ゴルドン (**Gordon**) **方程式**と呼び，その解 ϕ を**複素クライン–ゴルドン場**という[*5]．この場合，V を**ポテンシャル**と呼ぶ．上式の右辺第 2 項は，場の自己相互作用を表す項である．(6.2) の複素共役をとれば

$$\Box\phi(x)^*+M^2\phi(x)^*=-\frac{\partial V(\phi,\phi^*)}{\partial\phi(x)} \tag{6.3}$$

が得られる．これは ϕ の**複素共役場** ϕ^* に対する方程式である．ニュートン力学における力場に相当する量は

$$F(\phi(x),\phi(x)^*):=-\frac{\partial V(\phi,\phi^*)}{\partial\phi(x)^*} \tag{6.4}$$

である．

前節の脚注 3 ですでに述べたように，古典場の量子力学的対応物として**量子場**と呼ばれる対象が存在する．これは素粒子どうしの相互作用から生じる諸々の**量子現象** — 古典物理学 (ニュートン力学，相対性理論，古典電磁気学，熱力学) ではうまく説明できない現象 — を統一的に記述す対象である．各量子場には，それによって記述される素粒子の質量や電荷が付随する．上述の複素スカラー場の方程式 (6.2) に含まれる定数パラメータ M は，対応する量子場に付随する素粒子の質量 m と

$$M=\frac{mc}{\hbar} \tag{6.5}$$

という関係にある．ここで，$\hbar:=h/(2\pi)$ (h はプランクの定数) であり，これは量

[*5] 以下，単にクライン–ゴルドン場ともいう．

子現象に関わる基本的な物理定数である．この意味において，(6.2) における定数 M を (質量の次元は持たないが) 古典的クライン–ゴルドン場の質量という場合がある[*6]．

ローレンツ座標系 $(V_{\mathrm{M}}, \{e_\mu\}_{\mu=0}^d)$ をとり，$x \in V_{\mathrm{M}}$ を $x = cte_0 + \sum_{j=1}^d x^j e_j$ と展開する $(t, x^j \in \mathbb{R})$．このとき，(6.2) は

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi(x) + M^2\phi(x) = F(\phi(x), \phi(x)^*) \tag{6.6}$$

と書ける．ただし

$$\Delta := \sum_{j=1}^d \partial_j^2 = \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^2 \tag{6.7}$$

は d 次元のラプラシアンである (第2章演習問題2を参照)．

$V = 0$ の場合のクライン–ゴルドン方程式

$$\Box\phi(x) + M^2\phi(x) = 0 \tag{6.8}$$

を**自由なクライン–ゴルドン方程式**と呼び，その解を**自由なクライン–ゴルドン場**，あるいは単に**自由場**という．方程式 (6.8) の中にある $\phi(x)$ およびその偏導関数の冪はすべて1次である[*7]．このような性質を持つ偏微分方程式は**線形**であるという．

他方，(6.2) において，右辺が $\phi(x)$ の1次関数でない場合，方程式 (6.2) を**非線形クライン–ゴルドン方程式**と呼ぶ．

例 6.1 $a \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ として

$$V(z, w) = V_{\mathrm{H}}(z, w) := azw + \lambda z^2 w^2 \tag{6.9}$$

という場合を考える．このとき，方程式 (6.2) は

$$\Box\phi(x) + M^2\phi(x) = -a\phi(x) - 2\lambda|\phi(x)|^2\phi(x) \tag{6.10}$$

という形をとる．これは，非線形クライン–ゴルドン方程式の基本的な型の1つである．対応する量子場は，素粒子論の文脈では**ヒッグス場** (Higgs field) と呼ばれ，非常に重要な役割を演じる．V_{H} は**ヒッグスポテンシャル**と呼ばれる．

[*6] $c = \hbar = 1$ の単位系 (自然単位系) にうつれば $M = m$ であるので，いまふれた言い方は，この観点からは正当化される．

[*7] (6.8) の場合，偏導関数に関しては，2階の偏導関数だけが含まれる．

以下では，しばしば，次の記号を用いる：

$$\boldsymbol{x} := (x^1, \cdots, x^d) \in \mathbb{R}^d. \tag{6.11}$$

例 6.2 簡単な場合として，$d=3, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, V=0, M>0$ の場合を考え，さらに，$\phi(x)$ は t によらないとする．このとき，クライン–ゴルドン方程式 (6.6) は

$$(-\Delta + M^2)\phi(x) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \tag{6.12}$$

という形をとる．この方程式の解の 1 つとして

$$\phi_{\mathrm{Y}}(\boldsymbol{x}) := C \frac{e^{-M|\boldsymbol{x}|}}{|\boldsymbol{x}|}, \quad \boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \tag{6.13}$$

がある．ただし，C は任意の実定数である．関数 ϕ_{Y} を**湯川ポテンシャル**という[*8]．方程式 (6.12) は**湯川方程式**と呼ばれる場合がある．

6.3 自由なクライン–ゴルドン場

自由なクライン–ゴルドン方程式 (6.8) の一般解は，空間変数 $\boldsymbol{x}$ に関して，フーリエ変換の方法を用いることにより求めることができる．だが，ここではその詳細は省くことにして，検証できる結果だけを述べる．まず，関数 $\omega : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, \infty)$ を

$$\omega(\boldsymbol{k}) := c\sqrt{|\boldsymbol{k}|^2 + M^2}, \quad \boldsymbol{k} = (k^1, \cdots, k^d) \in \mathbb{R}^d \tag{6.14}$$

によって導入する．任意の d 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{R}^d, \boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して，これらのユークリッド内積を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ と記す：

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := \sum_{j=1}^d a_j b_j, \quad \boldsymbol{a}^2 := \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}, \quad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}. \tag{6.15}$$

i を虚数単位として $(i^2 = -1)$

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{k}}^{\pm}(x) &:= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} e^{\mp i(\omega(\boldsymbol{k})t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x})}, \\ x &= \sum_{\mu=0}^d x^\mu e_\mu \in V_{\mathrm{M}} \ (x^0 = ct, \boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^d)) \end{aligned} \tag{6.16}$$

によって定義される関数 $f_{\boldsymbol{k}}^{\pm}$ は自由なクライン–ゴルドン方程式の解であることが

[*8] 日本の偉大な理論物理学者のひとりであった湯川秀樹 (1907–1981) が核力 — 原子核を構成する核子 (陽子，中性子) の間に働く引力 — を説明するために，その独創的な中間子論において導いたポテンシャル．湯川は，中間子論により，1949 年，日本人として初めてのノーベル物理学賞を受けた．

わかる (定数 $1/\sqrt{(2\pi)^d}$ は便宜的なものであり，本質的ではない)*9．これを**平面波解**と呼ぶ．$\boldsymbol{k}$ を**波数ベクトル**，$\omega(\boldsymbol{k})$ を**角振動数**という．$f_{\boldsymbol{k}}^{\pm}(x)$ は $\boldsymbol{k}$ の向きに単位時間当り $\omega(\boldsymbol{k})/|\boldsymbol{k}|$ の距離だけ移動する平面波を表す．

いまの場合，粒子的描像との対応は次のようになっている：波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の平面波に対応する粒子の運動量とエネルギーを $\boldsymbol{p}, E$ とすれば

$$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}, \quad E = \hbar\omega(\boldsymbol{k}). \tag{6.17}$$

これを**プランク–アインシュタイン–ド・ブロイの関係式**という．

自由なクライン–ゴルドン方程式の解の全体を $\mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}^0$ としよう．これについて次の命題が成立する．

命題 6.3 $\mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}^0$ は無限次元の複素ベクトル空間である．

証明 $\phi_1, \phi_2 \in \mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}^0$ とすれば，

$$\Box\phi_1(x) + M^2\phi_1(x) = 0, \quad \Box\phi_2(x) + M^2\phi_2(x) = 0.$$

そこで，左辺どうし，右辺どうしを加えれば，$\Box(\phi_1(x)+\phi_2(x)) + M^2(\phi_1(x) + \phi_2(x)) = 0$ が得られる．したがって，$\phi_1 + \phi_2 \in \mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}^0$．同様に，任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$\alpha\phi_1 \in \mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}^0$ がわかる．

各 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d$ に対して，$f_{\boldsymbol{k}}^{\pm} \in \mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}^0$ である．$\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n$ を $\mathbb{R}^d$ の線形独立なベクトルとすれば，$f_{\boldsymbol{k}_1}^+, \cdots, f_{\boldsymbol{k}_n}^+$ は線形独立であることがわかる*10．$n \in \mathbb{N}$ は任意であるから，$\mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}^0$ は無限次元である． ■

注意 6.4 係数体を $\mathbb{R}$ に限れば，$\mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}^0$ は実ベクトル空間である．

命題 6.3 は，自由なクライン–ゴルドン方程式の任意の解 (複数) の線形結合 — これを**解の重ね合わせ**という — もまた自由なクライン–ゴルドン方程式の解であることを語る．これは，自由なクライン–ゴルドン方程式が線形であることからくる帰結の 1 つである．したがって，特に，任意の $N \in \mathbb{N}$ と任意の $a_{\boldsymbol{k}_n}, b_{\boldsymbol{k}_n} \in \mathbb{C}$ $(\boldsymbol{k}_n \in \mathbb{R}^d)$ に対して $\sum_{n=1}^{N}(a_{\boldsymbol{k}_n} f_{\boldsymbol{k}_n}^+ + b_{\boldsymbol{k}_n} f_{\boldsymbol{k}_n}^-)$ は，自由なクライン–ゴルドン方程式

---

*9 $-(\omega(\boldsymbol{k})^2/c^2) + \boldsymbol{k}^2 + M^2 = 0$ に注意．

*10 実際，$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_{\boldsymbol{k}_j}^+ = 0$ $(\alpha_j \in \mathbb{C})$ とすれば，すべての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{i\boldsymbol{k}_j \cdot \boldsymbol{x}} = 0$．両辺を x^ℓ $(\ell = 1, \cdots, d)$ で偏微分し $\boldsymbol{x} = 0$ とおけば，$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j k_j^\ell = 0$．これは $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{k}_j = 0$ を意味する．$\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n$ は線形独立であったから，$\alpha_j = 0$ が結論される．

の解である．そこで，このような重ね合わせの "連続版" を考えれば，それもまた自由なクライン–ゴルドン方程式の解になることが予想される．実際，連続関数 $a_\pm : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ で

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|a_\pm(\boldsymbol{k})|}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}} d\boldsymbol{k} < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |a_\pm(\boldsymbol{k})||\boldsymbol{k}| d\boldsymbol{k} < \infty \tag{6.18}$$

を満たすものを任意に選び

$$\phi_{\mathrm{free}}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{c\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2(2\pi)^d \omega(\boldsymbol{k})}} \left(a_+(\boldsymbol{k}) e^{-i(\omega(\boldsymbol{k})t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} + a_-(\boldsymbol{k})^* e^{i(\omega(\boldsymbol{k})t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} \right) d\boldsymbol{k} \tag{6.19}$$

とおけば，ϕ_{free} は自由なクライン–ゴルドン場であることが確かめられる．ここで，量子場との対応を考慮して，物理定数 $\hbar$ を入れた (問題 3 を参照)*11.

6.4 クライン–ゴルドン方程式の対称性

クライン–ゴルドン方程式 (6.2) の解の全体 — 解空間 — を $\mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}$ とする．この節では，この解空間の対称性について考察する．

6.4.1 ローレンツ対称性

スカラー場 $f : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{C}$ とローレンツ写像 $\Lambda \in \mathrm{O}(V_{\mathrm{M}})$ に対して，スカラー場 f_Λ を

$$f_\Lambda(x) := f(\Lambda^{-1}x) \tag{6.20}$$

によって定義する．

定理 6.5 ϕ が (6.2) の解ならば，ϕ_Λ もそうである．すなわち，$\phi \in \mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}$ ならば $\phi_\Lambda \in \mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}$.

証明 定理 5.5 の証明と同様. ■

第 5 章で議論した電磁ポテンシャルの場合と同様，この定理は，クライン–ゴルドン方程式 (6.2) の解空間 $\mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}$ のローンレッツ写像群に関する対称性 — ローレンツ対称性 — を表している．

---

*11 解の一般的な形ということであれば，$\sqrt{\hbar}a_+(\boldsymbol{k})/\sqrt{2(2\pi)^d\omega(\boldsymbol{k})}$, $\sqrt{\hbar}a_-(\boldsymbol{k})^*/\sqrt{2(2\pi)^d\omega(\boldsymbol{k})}$ をそれぞれ，しかるべき条件を満たす任意の複素数値関数 $b(\boldsymbol{k}), c(\boldsymbol{k})$ で置き換えることができる．

6.4.2 U(1) 対称性

ローレンツ対称性は，時空 V_{M} 上の写像であるローレンツ写像に関わる対称性である．時空 V_{M} の元は，物理学的には，時空に存在する物体の位置あるいは運動量といった外部自由度に関わる．したがって，ローレンツ対称性は，外部自由度に関する対称性であるといえる．ところで，複素スカラー場の場合，その終域である複素平面 $\mathbb{C}$ 上の写像に関わる対称性を考察することも可能である．それは，少なくとも数学的には，自然な理論展開でありうる．じつは，以下に示すように，こうした考察は，外部自由度の世界だけにとどまっていたのでは見えてこない美しい豊かな世界へと私たちを導くのである．

複素平面 $\mathbb{C}$ における基本的で自然な写像の1つは，$\mathbb{C}$ の原点のまわりでの角度 $\theta\in\mathbb{R}$ の回転である．この写像を $u(\theta)$ とすれば，

$$u(\theta)z := e^{i\theta}z, \quad z\in\mathbb{C} \tag{6.21}$$

によって与えられる．写像 $u(\theta)$ は線形であり，複素数の大きさ (絶対値) を保存する：

$$|u(\theta)z| = |z|, \quad z\in\mathbb{C}. \tag{6.22}$$

第1章，1.4節で導入した言葉を用いるならば，$u(\theta)$ は1次元複素内積空間 $\mathbb{C}$ 上のユニタリ変換である．そこで見たように，1次元ユニタリ変換の全体

$$\mathrm{U}(\mathbb{C}) = \{u(\theta)\,|\,\theta\in\mathbb{R}\}$$

は $\mathbb{C}$ 上の変換群であり，これは，1次元ユニタリ群 U(1) と同一視できる．

1次元ユニタリ変換 $u(\theta)$ は，次のようにして，自然な形で，複素スカラー場の空間に作用する写像へと拡張される．V_{M} 上の複素スカラー場の全体を $\mathfrak{F}(V_{\mathrm{M}})$，$\lambda\in\mathbb{R}$ を任意の定数とする．各実数 q に対して，写像 $u_\lambda(q):\mathfrak{F}(V_{\mathrm{M}})\longrightarrow\mathfrak{F}(V_{\mathrm{M}})$ を

$$u_\lambda(q)\phi := e^{iq\lambda}\phi, \quad \phi\in\mathfrak{F}(V_{\mathrm{M}}) \tag{6.23}$$

によって定義する．明らかに

$$|(u_\lambda(q)\phi)(x)| = |\phi(x)|, \quad x\in V_{\mathrm{M}}. \tag{6.24}$$

また，$u_\lambda(q)$ は複素ベクトル空間 $\mathfrak{F}(V_{\mathrm{M}})$ 上の線形作用素であることも定義からただちにわかる*12．さらに，次の命題が成り立つ：

*12 $\mathfrak{F}(V_{\mathrm{M}})$ は，関数の和とスカラー倍に関して，複素ベクトル空間である．

命題 6.6 対応 $u_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathsf{L}(\mathfrak{F}(V_\mathrm{M}))$ ($\mathfrak{F}(V_\mathrm{M})$ 上の線形作用素の空間)；$q \longmapsto u_\lambda(q)$ は 1 次元並進群としての $\mathbb{R}$ の表現である．さらに，各 $u_\lambda(q)$ は $\mathfrak{F}(V_\mathrm{M})$ 上の変換である．

証明 準同型性 $u_\lambda(q_1)u_\lambda(q_2) = u_\lambda(q_1+q_2)$ は指数関数の指数法則からしたがう．これから，特に，$u_\lambda(q)u_\lambda(-q) = I = u_\lambda(-q)u_\lambda(q)$. これは，$u_\lambda(q)$ が全単射であり

$$u_\lambda(q)^{-1} = u_\lambda(-q) \tag{6.25}$$

を意味する．ゆえに題意がしたがう． ■

この命題により，特に，$\{u_\lambda(q) | q \in \mathbb{R}\}$ は，$\mathfrak{F}(V_\mathrm{M})$ 上の変換群である．この変換群を U(1) ゲージ群と呼び，その要素 $u_\lambda(q)$ を **U(1) ゲージ変換**または**第 1 種のゲージ変換**という．この場合，q を**ゲージ荷電**という[*13].

U(1) ゲージ変換の幾何学的意味は次の通りである．まず，時空 V_M の各点 x に複素平面 $\mathbb{C}$ が "付随している" とし，この複素平面を $\mathbb{C}_x$ で表す．そして，スカラー場 ϕ の x における値 $\phi(x)$ は $\mathbb{C}_x$ の元であると見るのである．すると，U(1) ゲージ変換 $u_\lambda(q)$ は，各点 x ごとに $\mathbb{C}_x$ において $\phi(x)$ を $\mathbb{C}_x$ の原点のまわりに角度 $q\lambda$ だけ回転させる写像ということになる．

複素スカラー場 ϕ の各点 x での値 $\phi(x)$ は複素数であるから，その偏角 $\arg\phi(x)$ が定義される．この偏角を $\phi(x)$ の**位相** (phase) と呼ぶ．この概念を用いると，U(1) ゲージ変換 $u_\lambda(q)$ は，各点 x ごとに $\mathbb{C}_x$ において $\phi(x)$ の位相を $q\lambda$ だけずらす写像であるというふうにもとらえることができる．この意味において，$u_\lambda(q)$ を**場の位相変換**とも呼ぶ．

定理 6.7 連続微分可能な関数 $W : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ があって

$$V(z,z^*) = W(|z|^2), \quad z \in \mathbb{C} \tag{6.26}$$

が成り立つとしよう．このとき

$$u_\lambda(q)(\mathfrak{S}_\mathrm{KG}) = \mathfrak{S}_\mathrm{KG}. \tag{6.27}$$

証明 まず，$\partial V(z,z^*)/\partial z^* = W'(|z|^2)z$ に注意する．$\phi_q := u_\lambda(q)\phi$ とおくと，$q\lambda$ は定数であるから

$$\begin{aligned}(\Box\phi_q)(x) + M^2\phi_q(x) &= e^{iq\lambda}(\Box\phi(x) + M^2\phi(x)) \\ &= -W'(|\phi(x)|^2)\phi_q(x).\end{aligned}$$

[*13] この呼称の意味については後にふれる．

そこで (6.24) を使えば，右辺は $-W(|\phi_q(x)|^2)\phi_q(x)$ に等しいので，$\phi_q \in \mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}$ が結論される．したがって，$u_\lambda(q)\phi \in \mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}$．ゆえに $u_\lambda(q)(\mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}) \subset \mathfrak{S}_{\mathrm{KG}} \cdots (*)$．逆に，任意の $\phi \in \mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}$ に対して $\psi = \phi_{-q}$ とおけば，$\psi \in \mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}$ であり，$u_\lambda(q)\psi = \phi$ が成り立つ．したがって，$(*)$ の逆の包含関係も成り立つ． ■

仮定 (6.26) はポテンシャル V が U(1) 対称であることを意味する．すなわち

$$V(u(\theta)z, (u(\theta)z)^*) = V(z, z^*), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \forall u(\theta) \in \mathrm{U}(1).$$

したがって，定理 6.7 は，ポテンシャルの U(1) 対称性が U(1) ゲージ変換に関する解空間 $\mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}$ の対称性を導くことを語る．この性質を**クライン–ゴルドン方程式の U(1) 対称性**と呼ぶ．

6.5 古典場のラグランジュ形式

この節では，ニュートン力学におけるラグランジュ形式は古典場の理論の枠組みへと拡張されうることを示す．

6.5.1 クライン–ゴルドン方程式を導くラグランジュ密度関数

場の方程式 (6.2) をローレンツ座標系 $(V_{\mathrm{M}}, \{e_\mu\}_{\mu=0}^d)$ で考えると

$$\partial_0 \frac{\partial}{\partial(\partial_0\phi(x)^*)} |\partial_0\phi(x)|^2 - \sum_{j=1}^d \partial_j \frac{\partial}{\partial(\partial_j\phi(x)^*)} |\partial_j\phi(x)|^2$$
$$- \frac{\partial}{\partial\phi(x)^*} \{-M^2\phi(x)^*\phi(x) - V(\phi(x), \phi(x)^*)\} = 0$$

と書けることに注意する．そこで，$\phi: V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{C}$ を任意に固定し，関数 $L_V: V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$L_V(x) := \sum_{\mu=0}^d \partial^\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x)^* - M^2|\phi(x)|^2 - V(\phi(x), \phi(x)^*) \tag{6.28}$$

によって導入すれば，場の方程式 (6.2) は

$$\sum_{\mu=0}^d \partial_\mu \frac{\partial L_V(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x)^*)} - \frac{\partial L_V(x)}{\partial\phi(x)^*} = 0 \tag{6.29}$$

という形に書き換えられることがわかる．

(6.28) によって定義される関数 L_V を，V から定まるスカラー場 ϕ に関する**ラグランジュ密度関数**という．こうして，ニュートンの運動方程式の場合と同様，場の方程式 (6.2) は，ラグランジュ密度関数 L_V から (6.29) という対応規則によって得られることがわかる．(6.29) を**L_V から定まるラグランジュ方程式**という．

6.5.2 一般の複素スカラー場に関するラグランジュ方程式

ニュートンの運動方程式に関するラグランジュ方程式の場合と同様に，クライン–ゴルドン方程式に関するラグランジュ方程式 (6.29) もある一般化を持つ．いま，$[2+2(d+1)]$ 個の複素変数 $z, w, z_0, z_1, \cdots, z_d, w_0, w_1 \cdots, w_d$ の関数 $\mathscr{L}:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{d+1}\times\mathbb{C}^{d+1}\longrightarrow\mathbb{C}$ を考え，その変数依存性を $\mathscr{L}(z,w,(z_\mu),(w_\mu))$ と表す．関数 $\mathscr{L}$ は次の条件を満たすとする：

$$\left(\frac{\partial\mathscr{L}(z,z^*,(z_\mu),(z_\mu^*))}{\partial z^*}\right)^* = \frac{\partial\mathscr{L}(z,z^*,(z_\mu),(z_\mu^*))}{\partial z},$$

$$\left(\frac{\partial\mathscr{L}(z,z^*,(z_\mu),(z_\mu^*))}{\partial z_\mu^*}\right)^* = \frac{\partial\mathscr{L}(z,z^*,(z_\mu),(z_\mu^*))}{\partial z_\mu}.$$

複素スカラー場 $\phi: V_{\mathrm{M}}\longrightarrow\mathbb{C}$ に対して

$$L(x) := \mathscr{L}(\phi(x),\phi(x)^*,(\partial_\mu\phi(x)),(\partial_\mu\phi(x)^*)) \tag{6.30}$$

とおく．このとき，場 ϕ に関する偏微分方程式

$$\sum_{\mu=0}^{d}\partial_\mu\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x)^*)} - \frac{\partial L(x)}{\partial\phi(x)^*} = 0 \tag{6.31}$$

を L から定まる**ラグランジュ方程式**という．この場合，関数 L を**ラグランジュ密度関数**と呼ぶ．

例 6.8 クライン–ゴルドン方程式を導くラグランジュ密度関数 L_V は，関数 $\mathscr{L}$ が次の $\mathscr{L}_V$ で与えられる場合である：

$$\mathscr{L}_V(z,w,(z_\mu),(w_\mu)) := z_0 w_0 - \sum_{j=1}^{d} z_j w_j - M^2 zw - V(z,w),$$

$$z, z_\mu, w, w_\mu \in \mathbb{C}, \quad \mu = 0,1,\cdots,d.$$

実際，直接的な代入計算によって

$$L_V(x) = \mathscr{L}_V(\phi(x),\phi(x)^*,(\partial_\mu\phi(x)),(\partial_\mu\phi(x)^*)) \tag{6.32}$$

を確かめることができる．

注意 6.9 ラグランジュ方程式 (6.31) は，より高次の観点からは，質点系のラグランジュ形式の場合と同様，場に関する変分原理から導かれる[*14]．

[*14] 変分原理については，たとえば，保江邦夫『数理物理学方法序説 5 (変分学)』(日本評論社，2001) や拙著『現代物理数学ハンドブック』(朝倉書店，2005) の第 11 章を参照．

6.6 対称性と保存則

第3章の3.4節，3.5節で示したように，質点系のラグランジュ関数の対称性は，その対称性に応じて，ある保存則を導く．この種の構造は古典場のラグランジュ形式においても存在する．これがどのようなものであるかを見るのがこの節の目的である．

6.6.1 連続の方程式と保存則

まず，準備として，場の量に関する保存則を導く基本的な構造の1つを述べる．連続微分可能な関数 $u_\mu : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\mu=0,1,\cdots,d)$ についての1階の偏微分方程式

$$\partial_t u_0(t,\boldsymbol{x}) + \operatorname{div}\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad (t,\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \tag{6.33}$$

を考える．ただし，$\partial_t := \partial/\partial t$ で

$$\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) := (u_1(t,\boldsymbol{x}),\cdots,u_d(t,\boldsymbol{x})), \tag{6.34}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^d \partial_j u_j(t,\boldsymbol{x})$$
$$(\mathbb{R}^d \text{ 上のベクトル場 } \boldsymbol{u}(t,\cdot):\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R} \text{ の発散}). \tag{6.35}$$

この型の方程式は**連続の方程式**と呼ばれる．

t を時刻を表すパラメータと見るとき，この方程式が，適当な条件のもとで，ある保存則を導くことを示そう．

次の記号を導入する：

$$\hat{\boldsymbol{x}} := \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}. \tag{6.36}$$

命題 6.10 u_μ は (6.33) および

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_0(t,\boldsymbol{x})|\,d\boldsymbol{x} < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u_0(t,\boldsymbol{x})|\,d\boldsymbol{x} < \infty, \tag{6.37}$$

$$|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\cdot\hat{\boldsymbol{x}}| \le \frac{C}{R^p}, \quad |\boldsymbol{x}| = R \tag{6.38}$$

を満たすとする．ただし，$C>0, p$ は定数で $p>d-1$ とする．したがって

$$Q(t) := \int_{\mathbb{R}^d} u_0(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \tag{6.39}$$

は有限である．このとき，$Q(t)$ は t によらない定数である．

証明 $Q(t)$ は t について微分可能であり

$$\begin{aligned}\frac{dQ(t)}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u_0(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \quad (\because (6.33)) \\ &= -\lim_{R\to\infty}\int_{|\boldsymbol{x}|=R} \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\cdot\hat{\boldsymbol{x}}\,dS(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

(∵ ガウスの発散定理．右辺の積分は面積分).

仮定により，定数 $C'>0$ があって

$$\left|\int_{|\boldsymbol{x}|=R} \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\cdot\hat{\boldsymbol{x}}\,dS(\boldsymbol{x})\right| \le \frac{C'}{R^p}R^{d-1} \longrightarrow 0 \quad (R\longrightarrow\infty).$$

したがって $dQ(t)/dt=0$. ゆえに，$Q(t)$ は t によらない定数である． ■

まとめれば，次のようになる．$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ 上のベクトル値関数 $u=(u_0,u_1,\cdots,u_d):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^{d+1}$ が連続の方程式を満たすならば，適当な条件のもとで u の第 0 成分 u_0 の空間積分は時刻 t によらない定数である．こうして，連続の方程式から 1 つの保存則が導かれる．

例 6.11 流体力学においては，時刻 $t\in\mathbb{R}$, 位置 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ での流体密度 (単位体積当りの質量)，速度ベクトルをそれぞれ $\rho(t,\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})=(v_1(t,\boldsymbol{x}),\cdots,v_d(t,\boldsymbol{x}))\in\mathbb{R}^d$ とすれば連続の方程式

$$\partial_t\rho(t,\boldsymbol{x})+\operatorname{div}[\rho(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})]=0$$

が成り立つと仮定される．この式は，物理的には，時空点 $(t,\boldsymbol{x})$ での流出量密度 $\operatorname{div}[\rho(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})]$ が同一時空点での流体密度の時間的減少率 $-\partial\rho(t,\boldsymbol{x})/\partial t$ に等しいことを述べており，流体の生成消滅がなければ，物理的に自然な条件といえる．命題 6.10 を応用すれば，しかるべき条件 (命題 6.10 の仮定を $u_0=\rho, \boldsymbol{u}=\rho\boldsymbol{v}$ として表した条件) のもとで，流体の総質量 $\int_{\mathbb{R}^d}\rho(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ は時刻 t によらない保存量であることが結論される．

6.6.2 U(1) 対称性と電荷の保存則

$\mathscr{L}:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{d+1}\times\mathbb{C}^{d+1}\longrightarrow\mathbb{C}$ を連続微分可能な関数とし，任意の $\theta\in\mathbb{R}$ に対して，次の式を満たすとする：

$$\mathscr{L}(e^{i\theta}z,(e^{i\theta}z)^*,(e^{i\theta}z_\mu),((e^{i\theta}z_\mu)^*))=\mathscr{L}(z,z^*,(z_\mu),(z_\mu^*)),$$
$$z,z_\mu\in\mathbb{C},\mu=0,1,\cdots,d. \tag{6.40}$$

この性質を $\mathscr{L}$ の U(1) **対称性**と呼ぶ.

$\phi:V_{\rm M}\longrightarrow\mathbb{C}$ を連続微分可能な複素スカラー場とし,

$$\phi_\theta:=e^{i\theta}\phi$$

とおけば, (6.40) によって, 任意の $\theta\in\mathbb{R}$ と $x\in V_{\rm M}$ に対して

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(\phi_\theta(x),\phi_\theta(x)^*,(\partial_\mu\phi_\theta(x)),(\partial_\mu\phi_\theta(x)^*))\\&=\mathscr{L}(\phi(x),\phi(x)^*,(\partial_\mu\phi(x)),(\partial_\mu\phi(x)^*))\end{aligned} \tag{6.41}$$

が成り立つ. したがって, 左辺を θ の関数とみて $g(\theta)$ とおけば, $g(\theta)=g(0)$ であるから $g'(\theta)=0$. 特に, $g'(0)=0$. 一方, 合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}g'(0)=&\,i\phi(x)\frac{\partial L(x)}{\partial\phi(x)}-i\phi(x)^*\frac{\partial L(x)}{\partial\phi(x)^*}\\&+i\sum_{\mu=0}^d\left(\partial_\mu\phi(x)\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}-i\partial_\mu\phi(x)^*\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x)^*)}\right).\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&i\phi(x)\frac{\partial L(x)}{\partial\phi(x)}-i\phi(x)^*\frac{\partial L(x)}{\partial\phi(x)^*}\\&+i\sum_{\mu=0}^d\left(\partial_\mu\phi(x)\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}-\partial_\mu\phi(x)^*\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x)^*)}\right)=0.\end{aligned} \tag{6.42}$$

さて, ϕ はラグランジュ方程式 (6.31) の解であるとしよう. このとき, 上式の左辺の第1項+第2項は

$$i\sum_{\mu=0}^d\left(\phi(x)\partial_\mu\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}-\phi(x)^*\partial_\mu\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x)^*)}\right)$$

に等しい. そこで

$$J^\mu(x):=i\left(\phi(x)^*\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x)^*)}-\phi(x)\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\right),\quad \mu=0,1,\cdots,d \tag{6.43}$$

とおくと, (6.42) は

$$\sum_{\mu=0}^d\partial_\mu J^\mu(x)=0 \tag{6.44}$$

という形に書きなおせることがわかる. したがって, 命題 6.10 の応用により, 適

当な条件のもとで (読者みずから検証されたい)

$$Q_{\mathscr{L}} := \int_{\mathbb{R}^d} J^0\left(cte_0 + \sum_{j=1}^d x^j e_j\right) dx^1 \cdots dx^d \tag{6.45}$$

は時刻 t によらない定数である．

複素スカラー場 ϕ が荷電物質の場である場合

$$J(x) := \sum_{\mu=0}^d J_\mu \phi^\mu \tag{6.46}$$

$\left(J_\mu := \sum_{\nu=0}^d \eta_{\mu\nu} J^\nu\right)$ の適当な定数倍は，場が有する電荷の流れによって引き起こされる $(d+1)$ 次元の電流密度を表すと解釈される (問題 3 の注を参照)．この場合，$Q_{\mathscr{L}}$ は全電荷を表す．したがって，上の保存則は場の全電荷の保存則を意味するのである．こうして，**ラグランジュ密度関数の** U(1) **対称性は電荷の保存則を導く．**

例 6.12 ϕ がクライン–ゴルドン場の場合

$$J^\mu(x) = i\{\phi(x)^* \partial^\mu \phi(x) - \phi(x)\partial^\mu \phi(x)^*\}.$$

これは，ポテンシャル V によらないことに注意しよう．

6.6.3 並進対称性とエネルギー・運動量保存則

任意の $y = \sum_{\mu=0}^d y^\mu e_\mu \in V_{\mathrm{M}}$ に対して

$$D_x(y) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{L(x+\varepsilon y) - L(x)}{\varepsilon} = \sum_{\mu=0}^d \partial_\mu L(x) y^\mu.$$

他方，(6.30) の右辺を用いて $D_x(y)$ を計算すると，合成関数の微分法により

$$D_x(y) = \left(\sum_{\mu=0}^d \partial_\mu \phi(x) y^\mu\right) \frac{\partial L(x)}{\partial \phi(x)} + \left(\sum_{\mu=0}^d \partial_\mu \phi(x)^* y^\mu\right) \frac{\partial L(x)}{\partial \phi(x)^*}$$

$$+ \sum_{\nu=0}^d \left(\sum_{\mu=0}^d \partial_\mu (\partial_\nu \phi(x)) y^\mu\right) \frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\nu \phi(x))}$$

$$+ \sum_{\nu=0}^d \left(\sum_{\mu=0}^d \partial_\mu (\partial_\nu \phi(x)^*) y^\mu\right) \frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\nu \phi(x)^*)}.$$

したがって ($y^\mu \in \mathbb{R}$ は任意であったから)

$$\partial_\mu L(x) = \partial_\mu \phi(x) \frac{\partial L(x)}{\partial \phi(x)} + \partial_\mu \phi(x)^* \frac{\partial L(x)}{\partial \phi(x)^*}$$

$$+\sum_{\nu=0}^{d}\partial_\mu\partial_\nu\phi(x)\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\nu\phi(x))}+\sum_{\nu=0}^{d}\partial_\mu\partial_\nu\phi(x)^*\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\nu\phi(x)^*)}. \tag{6.47}$$

さて，ϕ はラグランジュ方程式 (6.31) の解であるとしよう．このとき

$$\frac{\partial L(x)}{\partial\phi(x)^*}=\sum_{\nu=0}^{d}\partial_\nu\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\nu\phi(x)^*)}, \tag{6.48}$$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial\phi(x)}=\sum_{\nu=0}^{d}\partial_\nu\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\nu\phi(x))}. \tag{6.49}$$

これらの式をそれぞれ (6.47) の右辺の第 2 項，第 1 項に代入して整理すれば

$$\partial_\mu L(x)=\sum_{\nu=0}^{d}\partial_\nu\left(\partial_\mu\phi(x)\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\nu\phi(x))}+\partial_\mu\phi(x)^*\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\nu\phi(x)^*)}\right). \tag{6.50}$$

そこで，$\partial_\mu=\sum_{\nu=0}^{d}\delta_\mu^\nu\partial_\nu$ に注意し

$$\mathscr{T}_\mu^\nu(x):=-\delta_\mu^\nu L(x)+\partial_\mu\phi(x)\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\nu\phi(x))}+\partial_\mu\phi(x)^*\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\nu\phi(x)^*)} \tag{6.51}$$

とおけば

$$\sum_{\nu=0}^{d}\partial_\nu\mathscr{T}_\mu^\nu(x)=0 \tag{6.52}$$

が得られる．まとめると次の結果が得られたことになる：

定理 6.13　方程式 (6.31) の任意の解 ϕ に対して，(6.52) が成り立つ．

さて

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\mathscr{T}_\mu^0(x)|d\boldsymbol{x}<\infty,\quad \int_{\mathbb{R}^d}|\partial_0\mathscr{T}_\mu^0(x)|d\boldsymbol{x}<\infty,\quad \mu=0,1\cdots,d, \tag{6.53}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{d}\mathscr{T}_\mu^j(x)\hat{x}^j\right|\le\frac{C_\mu}{R^p},\quad |\boldsymbol{x}|=R \tag{6.54}$$

が成り立つ場合を考える．ただし，$C_\mu>0, p$ は定数で $p>d-1$ とする．このとき

$$P_\mu(t):=\int_{\mathbb{R}^d}\mathscr{T}_\mu^0(x)d\boldsymbol{x},\quad x^0=ct \tag{6.55}$$

とおけば，命題 6.10 を $u_0=\mathscr{T}_\mu^0, u_j=\mathscr{T}_\mu^j$ の場合に応用することにより，次の結果が得られる．

系 6.14　方程式 (6.31) の任意の解 ϕ に対して，$P_\mu(t)$ $(\mu=0,1,\cdots,d)$ は t によらない定数，すなわち保存量である．

$P_\mu(t)$ の保存則を導いた対称性は何であったかというと，ラグランジュ密度関数 L が x に陽によっていないことであることに気付く (x 依存性は，$\phi(x), \phi(x)^*$, $\partial_\mu\phi(x), \partial_\mu\phi(x)^*$ を通しての依存性のみ)．この意味で，L は時空の並進に関してある種の対称性を持つのである．

P_0 は，物理的には場 ϕ の全エネルギーを表し，場 ϕ のハミルトニアンと呼ばれる．他方，$(1/c)(P_1, \cdots, P_d)$ は場 ϕ の運動量を表す．したがって，P_0 が保存量であるということは，**エネルギー保存則**を表し，P_j のそれは**運動量保存則**を意味する．

例 6.15 クライン–ゴルドン場の場合，$\mathscr{T}_\mu^\nu(x)$ を陽に表示すれば

$$\mathscr{T}_\mu^\nu(x) = -\delta_\mu^\nu\left(\sum_{\alpha=0}^d \partial^\alpha\phi(x)^*\partial_\alpha\phi(x) - M^2|\phi(x)|^2 - V(\phi(x), \phi(x)^*)\right)$$

$$+\partial^\nu\phi(x)^*\partial_\mu\phi(x) + \partial_\mu\phi(x)^*\partial^\nu\phi(x) \tag{6.56}$$

となる．したがって，この場合のハミルトニアンと運動量の形は次のようになる：

$$P_0 = \int_{\mathbb{R}^d}\left(|\partial_0\phi(x)|^2 + \sum_{j=1}^d|\partial_j\phi(x)|^2 + M^2|\phi(x)|^2 + V(\phi(x), \phi(x)^*)\right)d\boldsymbol{x}, \tag{6.57}$$

$$P_j = \int_{\mathbb{R}^d}(\partial_0\phi(x)^*\partial_j\phi(x) + \partial_0\phi(x)\partial_j\phi(x)^*)\,d\boldsymbol{x}, \quad j = 1, \cdots, d. \tag{6.58}$$

自由場の場合には，P_0, P_j に対して陽な表示を導くことができる (問題 3)．

注意 6.16 関数 $\mathscr{T}_\mu^\nu$ から

$$\mathscr{T}_{\mu\nu}(x) := \sum_{\alpha=0}^d \eta_{\nu\alpha}\mathscr{T}_\mu^\alpha(x)$$

をつくると，これから 2 階のテンソル場

$$\mathscr{T}(x) := \sum_{\mu,\nu=0}^d \mathscr{T}_{\mu\nu}(x)\phi^\mu \otimes \phi^\nu$$

が定義される．このテンソル場を**エネルギー・運動量テンソル**と呼ぶ．

注意 6.17 この節で行った議論は，複素スカラー場以外の場に対してもまったく並行的に展開される．

6.7 ゲージ対称性

この節では，これまでに登場しなかった新しい対称性を通して，クライン–ゴルドン場から電磁場へと至る道が存在することを見る．

6.7.1 局所的ゲージ対称性とゲージ場

6.4.2 項で考察した U(1) ゲージ変換 $u_\lambda(q)$ は，時空のどの点においても，場の位相を同じ値 $q\lambda$ だけずらす変換であった．この意味で U(1) ゲージ変換を**大局的な U(1) ゲージ変換**または**大局的な第1種ゲージ変換**という．しかし，より一般的な観点からは，場の位相のずらしを各時空点で同じにとる必要はない．では，複素スカラー場 ϕ の位相変換を時空の各点ごとに変えたらどうなるであろうか? 次にこの問題を考察する．そのために，写像 $\Lambda: V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して，写像 $U_\Lambda(q): \mathfrak{F}(V_{\mathrm{M}}) \longrightarrow \mathfrak{F}(V_{\mathrm{M}})$ を

$$(U_\Lambda(q)\phi)(x) := e^{iq\Lambda(x)}\phi(x), \quad \phi \in \mathfrak{F}(V_{\mathrm{M}}) \tag{6.59}$$

によって定義する．これを**局所的な U(1) ゲージ変換**または**局所的な第1種ゲージ変換**という．この場合，“局所的 (local)” というのは，$\phi(x)$ の位相のずらし (あるいは $\phi(x)$ を回転する角度) が時空の各点ごとに異なりうることの意である．関数 Λ が定数関数のときが大局的な U(1) ゲージ変換である．

容易にわかるように

$$U_\Lambda(0) = I, \tag{6.60}$$

$$U_\Lambda(q)U_\Lambda(q') = U_\Lambda(q+q'), \quad q, q' \in \mathbb{R}. \tag{6.61}$$

したがって，$\{U_\Lambda(q) | q \in \mathbb{R}\}$ は1次元並進群としての $\mathbb{R}$ の表現であり，$\mathfrak{F}(V_{\mathrm{M}})$ 上の1パラメータ変換群になっている．これを**局所的な U(1) ゲージ変換群**とよび，Λ をこの変換群の**生成子** (generator) という．

さて，ポテンシャル V が定理 6.7 の仮定を満たす場合のクライン–ゴルドン方程式

$$\Box\phi(x) + M^2\phi(x) = -W'(|\phi(x)|^2)\phi(x) \tag{6.62}$$

を考え，$\phi \neq 0$ がこの方程式の解であるとき，ϕ の局所的 U(1) ゲージ変換

$$\phi_\Lambda := U_\Lambda(q)\phi$$

がどのような偏微分方程式にしたがうかを調べよう．まず，単純な微分計算により

$$\partial_\mu \phi_\Lambda = iq(\partial_\mu \Lambda)\phi_\Lambda + e^{iq\Lambda}\partial_\mu \phi. \tag{6.63}$$

したがって

$$\partial_\mu \phi = e^{-iq\Lambda}(\partial_\mu - iq\partial_\mu \Lambda)\phi_\Lambda. \tag{6.64}$$

左から ∂^μ を作用させ，μ について和をとり，(6.62) を用いると

$$\sum_{\mu=0}^{d}(\partial^\mu - iq\partial^\mu\Lambda)(\partial_\mu - iq\partial_\mu\Lambda)\phi_\Lambda(x) + M^2\phi_\Lambda = -W'(|\phi_\Lambda|^2)\phi_\Lambda$$

が導かれる．これを見ると，$q\neq 0$ のとき Λ が定数でないならば，ϕ_Λ は (6.62) の解とは限らないことがわかる．つまり，いまの場合のクライン–ゴルドン方程式の解空間 $\mathfrak{S}_{\mathrm{KG}}$ は $U_\Lambda(q)$ 対称とは限らない．

しかし，ここであきらめないで，(6.62) に適当な修正を施すことによって，局所的な第 1 種ゲージ変換に対してその解空間が不変となるような方程式を探求してみよう．これに対する鍵は，(6.64) から

$$(\partial_\mu - iq\partial_\mu\Lambda)\phi_\Lambda = e^{iq\Lambda}\partial_\mu\phi$$

が成り立つことに注目することである．これは

$$(\partial_\mu + iqA_\mu^\Lambda)\phi_\Lambda = e^{iq\Lambda}(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi \tag{6.65}$$

を満たす場 A_μ^Λ, A_μ の導入を示唆する．実際，A_μ が与えられたとき

$$A_\mu^\Lambda := A_\mu - \partial_\mu\Lambda \tag{6.66}$$

とすれば，(6.65) は満たされる．

そこで，クライン–ゴルドン方程式 (6.62) の変形として

$$\sum_{\mu=0}^{d}(\partial^\mu + iqA^\mu(x))(\partial_\mu + iqA_\mu(x))\phi(x) + M^2\phi = -W'(|\phi(x)|^2)\phi(x) \tag{6.67}$$

という形の方程式を考える．このとき，方程式 (6.67) は，場の変換 $\phi \longrightarrow \phi_\Lambda, A_\mu \longrightarrow A_\mu^\Lambda$ のもとで不変であること，すなわち

$$\sum_{\mu=0}^{d}(\partial^\mu + iqA^{\mu\Lambda})(\partial_\mu + iqA_\mu^\Lambda)\phi_\Lambda + M^2\phi_\Lambda(x) = -W'(|\phi_\Lambda(x)|^2)\phi_\Lambda(x)$$

が成立することがわかる．

新たに導入された場の組 (A_μ) は，絶対的観点からはある 1 次微分形式 A のローレンツ座標系での成分表示と見るのが自然である．すなわち

$$A(x) = \sum_{\mu=0}^{d} A_\mu(x)\phi^\mu \tag{6.68}$$

($\{\phi^\mu\}$ は $\{e_\mu\}_\mu$ の双対基底)．この 1 次微分形式をスカラー場 ϕ に同伴する**ゲージ場**または**ゲージポテンシャル**と呼ぶ．同様に

$$A^\Lambda := \sum_{\mu=0}^{d} A_\mu^\Lambda\phi^\mu \tag{6.69}$$

を定義する．このとき，場の変換 (6.66) は

$$A^{\Lambda} = A - d\Lambda \tag{6.70}$$

と書かれる．場の組 (ϕ, A) の変換

$$(\phi, A) \longrightarrow (\phi_{\Lambda}, A^{\Lambda})$$

を**局所的ゲージ変換** (local gauge transfirmation) という．

上述のことから，次の事実が導かれる：**(ϕ, A) が方程式 (6.67) の解ならば，その局所的ゲージ変換 $(\phi^{\Lambda}, A^{\Lambda})$ も (6.67) の解である．**この性質を方程式 (6.67) の**局所的ゲージ対称性**と呼ぶ．

クライン–ゴルドン方程式の変形として導かれた方程式 (6.67) は複素スカラー場 ϕ とゲージ場 A の相互作用を記述する．この場合，q は相互作用の強さを表す定数 — **結合定数** — と見ることができる ($q=0$ ならば，(6.67) はもともとのスカラー場の方程式であり，A は関与していないことに注意)．こうして，大局的ゲージ対称性を持つ理論を出発点として，新しい場＝ゲージ場を導入することにより，局所的ゲージ対称性を持つ理論をつくることができることがわかる．

では，ゲージ場 A は物理的には何を表すのであろうか? 容易に気付くように，変換 (6.70) は電磁ポテンシャルに対するゲージ変換と同一の形をしている (5.7 節を参照)．そこで，ϕ が荷電物質場を表す場合には，A を電磁ポテンシャルと同一視するのは自然である．この場合，$\hbar cq$ は電荷を表す*15．こうして，電磁ポテンシャルは，じつは，荷電物質場を表す複素スカラー場に同伴するゲージ場であること，そして，電磁気学の範囲では，その意味がよくわからなかったゲージ変換におけるゲージ関数 Λ の意味が明らかになる．つまりそれは，物質場に関する局所的 U(1) ゲージ変換群の生成子なのである．さらに，いまの場合のゲージ荷電 q は電荷に比例する定数であり，荷電物質場と電磁ポテンシャルの結合定数を表すこともわかった．

電磁ポテンシャル A が考察下の荷電物質場 ϕ とだけ相互作用をするとすれば，

---

*15 A_μ が電磁ポテンシャルを表すとすると，次元解析により，$\hbar cq$ は電荷の単位を持つ ($\hbar$ は作用の次元＝[エネルギー]×[時間] を持つ)．$\because$ $q\Lambda$ は無次元であり ($[q][\Lambda]=1$)，$[A_\mu]=[\Lambda]/L$ (L は長さの次元)．他方，$[A_\mu]=$[電場]$L=$[力]L/[電荷]．したがって，$[q]$[力]$L^2=$[電荷]．これと $[\hbar c]=$[力]L^2 による．

$(d+1)$ 次元電流密度 $J^{(\phi,A)}=\sum_{\mu=0}^{d} J_{\mu}^{(\phi,A)}\phi^{\mu}$ は，次のように与えられる[*16]：

$$J_{\mu}^{(\phi,A)}(x)=i\{\phi(x)^{*}(\partial_{\mu}+iqA_{\mu}(x))\phi(x)-((\partial_{\mu}+iqA_{\mu}(x))\phi(x))^{*}\phi(x)\}.$$

この場合，連立偏微分方程式

$$\sum_{\mu=0}^{d}(\partial^{\mu}+iqA^{\mu}(x))(\partial_{\mu}+iqA_{\mu}(x))\phi(x)+M^{2}\phi=-W'(|\phi(x)|^{2})\phi(x), \tag{6.71}$$

$$\Box A_{\mu}(x)-\partial_{\mu}(\mathrm{Div}\,A)(x)=qJ_{\mu}^{(\phi,A)}(x) \tag{6.72}$$

が複素スカラー場 ϕ とゲージ場 A の相互作用を記述する基礎方程式となる．この型の方程式を**クライン–ゴルドン–マクスウェル程式**という．

注意 6.18 複素スカラー場が荷電物質場とは異なる場を表す場合には，ゲージ荷電 q およびゲージ場 A は，上述のものとは異なる対象を表しうる．

以上の議論をまとめると次のようになる：複素スカラー場の理論に対して局所的ゲージ対称性を要求することにより，新しい古典場としてゲージ場が導入される．そして，この場合，ゲージ場と複素スカラー場の相互作用の形も同時に決定されてしまう．ある種の対称性の要請だけで，このように強い構造が生じるということは，きわめて注目に値する．

この種の構造は複素スカラー場以外の物質場の場合にも存在することが示される．これを手短に説明すると，次のようになる．複素スカラー場の場合，大局的ゲージ対称性は 1 次元ユニタリ群 U(1) の表現に関するものであった．そこでこの点に着目し，1 次元ユニタリ群のかわりに別の群 — たとえば，SU(2), SU(3) (1.2 節を参照) — を大局的ゲージ対称性の群として採用し (もちろん，この場合，その群の表現が作用する場は，複素スカラー場ではなく，多成分の場である)，それに対して，U(1) の場合と同様に局所的ゲージ対称性を考察するのである．このとき，複素スカラー場の場合とまったく並行的な仕方で，当該の群に付随する新しいゲージ場が導入される．こうして，局所的ゲージ対称性は，一定の範疇の古典場どうしの相互作用を決める 1 つの原理と見ることが可能である．これをゲージ

[*16] 発見法的には，(6.67) がクライン–ゴルドン方程式 (6.62) の左辺の中に含まれる偏微分作用素 ∂_{μ} を $\partial_{\mu}+iqA_{\mu}(x)$ で置き換えて得られることに注意し，例 6.12 の J^{μ} において，$\partial_{\mu}\phi(x)$ を $(\partial_{\mu}+iqA_{\mu}(x))\phi(x)$ で置き換えればよい．実際，$\phi(x)$ が (6.67) の解ならば，$\sum_{\mu=0}^{d}\partial^{\mu}J_{\mu}^{(\phi,A)}(x)=0$ が成り立つことを示すのは難しくない．

対称性の原理といい，この原理を基礎におく理論は**ゲージ場の理論**と呼ばれる．

ゲージ場の理論は，大局的ゲージ対称性の群の可換性，非可換性に応じて大きく 2 種類に分かれる．大局的ゲージ対称性の群が可換群の場合のゲージ場の理論を**可換ゲージ場の理論**，非可換群の場合のそれを**非可換ゲージ場の理論**という．後者は創始者の名にちなんで**ヤン–ミルズ (Yang-Mills) 理論**とも呼ばれる．

1 次元ユニタリ群 U(1) は可換群なので，上述の複素スカラー場に伴うゲージ場の理論は可換ゲージ場の理論の例である．他方，SU(2) や SU(3) は非可換群なので，これらの群を大局的ゲージ対称性の群とするゲージ場の理論は非可換ゲージ場の理論の例を与える．

現在，自然界における力学的物理現象をあらしめている力は少なくとも 4 種類あることが知られている．すなわち，重力，電磁気力，強い力 (ハドロンと呼ばれる素粒子の間に働く力)，弱い力 (ある種の素粒子の崩壊に関わる力) である．現代物理学の最大の目標の 1 つはこれらの諸力を統一的に記述する理論を構築することである．この構築にとって，ゲージ対称性の原理が有効であることが部分的に示されている．ただし，この場合，物質場やゲージ場はもはや古典場ではなく，素粒子を生成・消滅させる機能を有する**量子場**と呼ばれる対象によってとって代わられる[*17]．

第 6 章の演習問題

1. 複素スカラー場 $\phi: V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して，2 つの実スカラー場 $\phi_1, \phi_2 : V_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{R}$ がそれぞれ，ただ 1 つ存在して，$\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$ $(x \in V_{\mathrm{M}})$ と表されることを示せ．

2. 複素スカラー場 ϕ はクライン–ゴルドン方程式

$$\Box\phi(x) + M^2\phi(x) = F(\phi(x), \phi(x)^*)$$

の解であるとする．ただし，$F: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ とする．このとき，問題 1 の実スカラー場 ϕ_1, ϕ_2 は次の方程式を満たすことを示せ．

$$\Box\phi_1(x) + M^2\phi_1(x) = F_1(\phi_1(x), \phi_2(x)),$$

[*17] 拙著『多体系と量子場』(岩波書店，2002) や拙著『フォック空間と量子場 (下)』(日本評論社，2000 年) の第 8 章以降を参照．ゲージ場の量子論の物理的側面については，たとえば，近藤慶一『ゲージ場の量子論入門』，サイエンス社，2006 を参照．

$$\Box\phi_2(x)+M^2\phi_2(x)=F_2(\phi_1(x),\phi_2(x)).$$

ただし，$F_j:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ $(j=1,2)$ は次の式によって定義される：

$$F_1(x,y):=\frac{F(x+iy,x-iy)+F(x+iy,x-iy)^*}{2},$$

$$F_2(x,y):=\frac{F(x+iy,x-iy)-F(x+iy,x-iy)^*}{2i},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

3. (6.19) によって定義される自由なクライン–ゴルドン場 ϕ_{free} に対する全電荷

$$Q:=\int_{\mathbb{R}^d} i\{\phi_{\mathrm{free}}(x)^*\partial^0\phi_{\mathrm{free}}(x)-\phi_{\mathrm{free}}(x)\partial^0\phi_{\mathrm{free}}(x)^*\}\,d\boldsymbol{x},$$

ハミルトニアン

$$P_0=\int_{\mathbb{R}^d}(|\partial_0\phi_{\mathrm{free}}(x)|^2+\sum_{j=1}^d|\partial_j\phi_{\mathrm{free}}(x)|^2+M^2|\phi_{\mathrm{free}}(x)|^2)\,d\boldsymbol{x}$$

および運動量

$$P_j=\int_{\mathbb{R}^d}\{\partial_0\phi_{\mathrm{free}}(x)^*\partial_j\phi_{\mathrm{free}}(x)+\partial_0\phi_{\mathrm{free}}(x)^*\partial_j\phi_{\mathrm{free}}(x)\}\,d\boldsymbol{x}$$

について次の式が成り立つことを示せ．

$$Q=\hbar c\int_{\mathbb{R}^d}(a_+(\boldsymbol{k})^*a_+(\boldsymbol{k})-a_-(\boldsymbol{k})^*a_-(\boldsymbol{k}))\,d\boldsymbol{k}. \tag{$\star$}$$

$$P_0=\int_{\mathbb{R}^d}\hbar\omega(\boldsymbol{k})\,(a_+(\boldsymbol{k})^*a_+(\boldsymbol{k})+a_-(\boldsymbol{k})^*a_-(\boldsymbol{k}))\,d\boldsymbol{k}. \tag{$\star\star$}$$

$$P_j=c\int_{\mathbb{R}^d}\hbar k_j\,(a_+(\boldsymbol{k})^*a_+(\boldsymbol{k})+a_-(\boldsymbol{k})^*a_-(\boldsymbol{k}))\,d\boldsymbol{k}. \tag{$\star\star\star$}$$

ただし

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{|a_\pm(\boldsymbol{k})|}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}}\right)^p d\boldsymbol{k}<\infty,\quad \int_{\mathbb{R}^d}(|a_\pm(\boldsymbol{k})||\boldsymbol{k}|)^p\,d\boldsymbol{k}<\infty,\quad p=1,2$$

とする．

ヒント：フーリエ変換に関する次の事実を用いると簡単である[*18]．

$\mathbb{R}^d$ 上の関数の集合 $\mathscr{F}$ を

$$\mathscr{F}:=\left\{f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{C};\text{連続}\,\middle|\,\int_{\mathbb{R}^d}|f(\boldsymbol{k})|\,d\boldsymbol{k}<\infty,\int_{\mathbb{R}^d}|f(\boldsymbol{k})|^2\,d\boldsymbol{k}<\infty\right\}$$

によって定義する．各 $f\in\mathscr{F}$ に対して

[*18] くわしくは，たとえば，拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) の第 5 章を参照．積分をルベーグ積分の意味でとるならば，以下の公式 (†) は，$\int_{\mathbb{R}^d}|f(\boldsymbol{k})|^2\,d\boldsymbol{k}<\infty$, $\int_{\mathbb{R}^d}|g(\boldsymbol{k})|^2\,d\boldsymbol{k}<\infty$ を満たす任意のボレル可測関数 f,g に対して成立する．

$$\check{f}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$$

— これを f の**逆フーリエ変換**という — とすれば，任意の $f, g \in \mathscr{F}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d} \check{f}(\boldsymbol{x})^* \check{g}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{k})^* g(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k}. \tag{†}$$

注　プランク–アインシュタイン–ド・ブロイの関係式によって，粒子的描像との対応では，$\hbar\omega(\boldsymbol{k})$ は，運動量が $\hbar\boldsymbol{k}$ の粒子の特殊相対論的エネルギーを表す．したがって，$(\star\star)$, $(\star\star\star)$ は $\rho_\pm(\boldsymbol{k}) := a_\pm(\boldsymbol{k})^* a_\pm(\boldsymbol{k}) = |a_\pm(\boldsymbol{k})|^2$ が波数ベクトル空間における粒子数密度を表すことを語る．この場合，ρ_+, ρ_- に応じて，2 種類の粒子が存在することが示唆される．それらをそれぞれ，仮にプラス粒子，マイナス粒子と呼ぼう．すると $(\star)$ によって，$Q/\hbar c$ は，プラス粒子に対しては 1 の値をとり，マイナス粒子に対しては -1 の値をとる物理量の総量を表すことになる．複素スカラー場が荷電物質場の場合には，プラス粒子は正の電荷の粒子を表し，マイナス粒子は負の電荷 (ただし，電荷の大きさは同じ) の粒子を表すと解釈するのが自然である．このとき，$Q/\hbar c$ は物質場全体の全電荷に比例する量を表す．この発見的考察は，実際，対応する量子場の理論によって裏付けられる．たとえば，プラス粒子は π^+ 中間子であり，マイナス粒子は π^- 中間子である．

4. 電磁ポテンシャル $A = \sum_{\mu=0}^{d} A_\mu \phi^\mu$ と $(d+1)$ 次元電流密度 $J = \sum_{\mu=0}^{d} J_\mu \phi^\mu$ に対して

$$\mathscr{L}_{\mathrm{EM}}(x) := -\frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=0}^{d} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \sum_{\mu=0}^{d} J^\mu(x) A_\mu(x), \quad x \in V_{\mathrm{M}}$$

とおく．ただし，$F_{\mu\nu}$ は電磁場テンソルの成分であり

$$F^{\mu\nu} := \sum_{\alpha,\beta=0}^{d} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

このとき，ラグランジュ方程式

$$\sum_{\mu=0}^{d} \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{EM}}(x)}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} - \frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{EM}}(x)}{\partial A_\nu(x)} = 0, \quad \nu = 0, 1, \cdots, d$$

は古典電磁気学の基礎方程式を与えることを示せ．

注　$\mathscr{L}_{\mathrm{EM}}$ を**電磁場のラグランジュ密度関数**と呼ぶ．

第7章

量子力学

7.1　はじめに

物質を構成する究極的な要素である原子や素粒子のような微視的な対象は総称的に**量子的粒子**と呼ばれる．量子的粒子は，古典力学的な意味での粒子ではなく，古典物理学では記述できない対象である．実際，量子的粒子は，観測装置の設定に応じて，いろいろな“姿”で現象しうる．この特質を量子的粒子の**現象的多重性**と呼ぶ．いわゆる“波動–粒子の2重性”はその一例である．量子的粒子たちが織り成す諸現象，すなわち，量子現象を原理的な仕方で解明するには，古典物理学を超える理論体系が必要であり，そのような理論の探求から生まれたのが量子力学である．したがって，当然のことながら，量子力学は古典物理学とは本質的に異なる特徴を持っている．この章では，フォン・ノイマン (J. von Neumann) によってその基礎が築かれた公理論的量子力学 — 量子的粒子に対する特定の描像や“座標”に依拠しない理論形式 — に基づいて，量子力学における対称性について，ごく基本的な部分を叙述する*[1]．

7.2　状態と物理量

量子的粒子からなる系 — 量子系 — を記述するにあたっても，基本となるのは系の状態と物理量の概念である．第2章で見たように，ニュートン力学では，系の状態は相空間の点で表され，物理量は位置と運動量 (または速度) の関数によって表される．だが，古典力学の理念がもはや全面的には有効ではない量子現象を

*[1] 本章は，量子力学全般に関する論述を意図するものではない．

生み出す量子系とって，状態ならびに物理量の概念は古典力学のそれとは根本的に異なる．

7.2.1 量子力学的状態

量子系の状態 — 量子力学的状態ともいう — は次の公理によって規定される[*2]．

(QM.1) 任意の1つの量子系 — Sとしよう — の状態は，ある複素ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ の零でないベクトルによって表される．ただし，2つのベクトル $\Psi,\Phi\in\mathscr{H}$ が同じ状態を表すのは，零でない定数 $\alpha\in\mathbb{C}$ があって $\Psi=\alpha\Phi$ が成り立つとき，かつこのときに限る (**状態の相等原理**)．$\mathscr{H}$ を量子系Sの**状態のヒルベルト空間**と呼び，状態を表すベクトルを**状態ベクトル**という．

この公理に関して，若干の注意をしておこう．まず，複素ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ は系Sに対して一意的には決まらない．実際，$\mathscr{H}$ と同型なヒルベルト空間 ($\mathscr{H}$ のユニタリ変換) はすべて状態のヒルベルト空間でありうる．これは，じつは，量子的粒子の現象的多重性と呼応する性質なのである．つまり，1つのヒルベルト空間の選択は，量子力学的には，ある1つの物理的描像の枠組みの選択に対応するのである．

例 7.1 空間的自由度だけを有する有限個の量子的粒子からなる系の状態を表すための基本的な表示の仕方として，座標表示，運動量表示と呼ばれるものがある．前者は，量子的粒子の位置を測定するという描像に基づくものであり，後者は，運動量の測定という描像と関わる．物理的空間を $\mathbb{R}^d=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_d)\,|\,x_j\in\mathbb{R}\ (j=1,\cdots,d)\}$ とし，この中に，粒子的描像から見て1個の量子的粒子が存在する量子系を考えよう (通常は $d=3$)．この場合，座標表示のヒルベルト空間は，$\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ積分の意味で2乗可積分な関数の同値類から生成されるヒルベルト空間

$$L^2(\mathbb{R}^d):=\left\{\psi:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{C};\text{ボレル可測}\,\middle|\,\int_{\mathbb{R}^d}|\psi(\boldsymbol{x})|^2\,d\boldsymbol{x}<\infty\right\} \tag{7.1}$$

である．他方，運動量表示のそれは $L^2(\mathbb{R}^{d^*})$ である．ただし，$\mathbb{R}^{d^*}$ は $\mathbb{R}^d$ の双対空間である．これら2つのヒルベルト空間はフーリエ変換 — これは $L^2(\mathbb{R}^d)$ から

[*2] ヒルベルト空間論の術語については，付録Fを参照．

$L^2(\mathbb{R}^{d*})$ へのユニタリ変換 — を通じて，互いに同型になっている[*3]．ここで，位置の測定と運動量の測定は，不確定性関係により，互いに排他的なものであることにも注意しよう．つまり，いま述べた2つの描像は互いに相補的なのである[*4]．

公理 (QM.1) において，もう1つ重要な点は，状態の相等原理として言及された事柄である．この原理にしたがえば，量子系の状態は，状態のヒルベルト空間のベクトルそのものではないということである．じつは，状態の相等原理は，次のようにして，状態のヒルベルト空間の中にある同値関係を定め，これによって，状態のヒルベルト空間の元は同値類に類別される[*5]．そして，この同値類こそ，量子力学的状態を表すものなのである．

任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ についてある定数 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して，$\Psi = \alpha\Phi \cdots (*)$ が成り立つとき，$\Psi \sim \Phi$ と記す．この $\sim$ は，$\mathscr{H}$ における1つの関係である．これが同値関係であることは次のようにしてわかる：まず，$\Psi = 1 \cdot \Psi$ であるから，$\Psi \sim \Psi$. したがって反射律は成立する．$\Psi \sim \Phi$ ならば $(*)$ を満たす $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ があるので $\Phi = \alpha^{-1}\Psi$. したがって $\Phi \sim \Psi$. ゆえに対称律も成り立つ．$\Psi \sim \Phi, \Phi \sim \Xi \in \mathscr{H}$ ならば，$(*)$ を満たす $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と $\Phi = \beta\Xi$ を満たす $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ があるから，$\Psi = (\alpha\beta)\Xi$. $\alpha\beta \neq 0$ であるから $\Psi \sim \Xi$. したがって，推移律も成立する．

零でないベクトル $\Psi \in \mathscr{H} \setminus \{0\}$ と同値なベクトルの全体，すなわち，上の同値関係 $\sim$ による Ψ の同値類を $[\Psi]$ と記す：

$$[\Psi] := \{\alpha\Psi \,|\, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}. \tag{7.2}$$

この型の集合を**射線**と呼ぶ．このとき，$\mathscr{H} \setminus \{0\}$ は，射線により類別される．射線の集合 (= $\sim$ による $\mathscr{H} \setminus \{0\}$ の商集合)

$$P(\mathscr{H}) := (\mathscr{H} \setminus \{0\})/\sim = \{[\Psi] \,|\, \Psi \in \mathscr{H} \setminus \{0\}\} \tag{7.3}$$

[*3]拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) の第6章や新井朝雄・江沢 洋『量子力学の数学的構造 II』(朝倉書店，1999) の第3章を参照．だが，いまは，この点についてくわしく知る必要はない．なお，慣習的には，$\mathbb{R}^{d*}$ は $\mathbb{R}^d$ と同一視して扱う．ここでは，座標表示と運動量表示のヒルベルト空間の違い (通常はあまり意識されない) を際立たせるために概念的に正確な記述を試みた．

[*4]相補性の概念は，量子力学の誕生へ向かう歴史的な文脈において非常に大きな貢献をした偉大な物理学者ニールス・ボーアによって提唱された．相補性とは，平たくいえば，位置と運動量のように互いに他の決定を排除する物理量であっても，系の全的記述においては両方が必要であるという性質を指す．くわしくは，ニールス・ボーア『原子理論と自然記述』(井上健訳，みすず書房，1990) やニールス・ボーア論文集1『因果性と相補性』(山本義隆編訳，岩波書店，岩波文庫，1999) を参照．

[*5]同値関係の概念については，付録Aを参照．

を $\mathscr{H}$ の**射影空間**という．

状態の相等原理は次のようにいいかえられる：同じ状態を表すベクトルは同じ射線に属し，同じ射線に属するベクトルは同一の状態を表す．こうして，量子力学的状態は，複素ヒルベルト空間の射線によって表される，と簡潔に述べることができる．したがって，量子力学的状態の空間は，複素ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ の射影空間 $P(\mathscr{H})$ である．そこで，$P(\mathscr{H})$ を**量子力学的状態空間**あるいは単に**状態空間**と呼ぶ．以下，量子力学的状態を単に状態ともいう．

一般に，ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ の内積とノルムを，それぞれ $\langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|$ と表す ($\|\Psi\|=\sqrt{\langle\Psi,\Psi\rangle}, \Psi\in\mathscr{H}$)[*6].

ベクトル $\Phi\in\mathscr{H}\setminus\{0\}$ に対して，ベクトル $\hat{\Phi}$ を

$$\hat{\Phi}:=\frac{\Phi}{\|\Phi\|} \tag{7.4}$$

によって定義する．これは単位ベクトルである：$\|\hat{\Phi}\|=1$. $\hat{\Phi}$ は Φ の**規格化**と呼ばれる．明らかに

$$[\hat{\Phi}]=[\Phi]. \tag{7.5}$$

これから，状態ベクトルとしては，単位ベクトルを考えれば十分であることがわかる．

7.2.2 物理量

量子系の物理量に関する公理は次のように述べられる：

(QM.2) 量子系の物理量は，状態のヒルベルト空間上で作用する自己共役作用素によって表される．

物理量のうち，系の全エネルギーを表す自己共役作用素を**ハミルトニアン**と呼ぶ．

物理量の中には，古典力学との対応から定義されるものがある．そのような物理量の基本的な例をあげておこう．

例 7.2 d 次元空間 $\mathbb{R}^d=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_d)\,|\,x_j\in\mathbb{R}\ (j=1,\cdots,d)\}$ において，粒子的描像から見て 1 個の量子的粒子からなる系を考える．この系の状態のヒルベル

[*6] $\langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|$ がそれぞれ，ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ の内積，ノルムであることを明示したい場合には，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}, \|\cdot\|_{\mathscr{H}}$ と記す．

ト空間として，$L^2(\mathbb{R}^d)$ がとれることはすでに言及した (例 7.1)．量子的粒子の第 j 座標 $(j=1,\cdots,d)$ に関する**位置作用素**は，座標変数 x_j をかける作用素 q_j で与えられる*7：

$$(\text{定義域})\quad D(q_j):=\left\{\psi\in L^2(\mathbb{R}^d)\;\middle|\;\int_{\mathbb{R}^d}|x_j\psi(\boldsymbol{x})|^2\,d\boldsymbol{x}<\infty\right\},\tag{7.6}$$

$$(\text{作用})\quad (q_j\psi)(\boldsymbol{x}):=x_j\psi(\boldsymbol{x}),\quad \psi\in D(q_j).\tag{7.7}$$

作用素 q_j は自己共役であることが示される．

力を受けない量子的粒子を**自由粒子**と呼ぶ．**自由粒子の運動量**の第 j 成分 p_j は

$$p_j:=-i\hbar D_j\tag{7.8}$$

で定義される．ただし，$\hbar$ はプランクの定数 h を 2π で割った数であり (数学的には正のパラメータ)，D_j は変数 x_j に関する一般化された偏微分作用素である：$D_j:=\bar{\partial}_j$ (通常の偏微分作用素 $\partial_j=\partial/\partial x_j$ の閉包)．

古典力学における物理量は，質点の位置を $x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, 運動量を $\tilde{p}=(\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_d)\in\mathbb{R}^d$ とすれば，x と $\tilde{p}$ の関数 $f(x,\tilde{p})$ として表される (f は考える物理量ごとに異なる)．量子力学において，$f(x,\tilde{p})$ に対応する物理量の候補は，$f(x,\tilde{p})$ において形式的な置換え：$x_j\longrightarrow q_j, \tilde{p}_j\longrightarrow p_j$ を行うことによって得られる．この処方を**正準量子化**と呼ぶ．次にあげる 2 つの例はこの処方により定義される物理量である．

例 7.3 前例において，量子的粒子がポテンシャル $V:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ (ボレル可測関数) の影響下で運動する場合を考える．関数 V による掛け算作用素も同じ記号で表す．量子的粒子の質量を $m>0$ とする．このとき，量子的粒子を非相対論的に扱うならば，系のハミルトニアンは

$$H_V:=\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{d}p_j^2+V=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V\tag{7.9}$$

によって与えられる (例 3.8 を参照)．ただし，$\Delta:=\sum_{j=1}^{d}D_j^2$ は d 次元の**一般化されたラプラシアン**である．この型の作用素を**シュレーディンガー型作用素**と呼ぶ．H_V が自己共役になるかならないかはポテンシャル V の性質に依存する*8．

---

*7 本書では，線形作用素 T の定義域を $D(T)$ で表す．

*8 くわしくは，拙著『量子現象の数理』(朝倉書店，2006) の第 2 章を参照．

例 7.4 $\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能な関数で台が有界であるものの全体 $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を定義域とする，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 L_j $(j=1,2,3)$ を次のように定義する：

$$L_1 := q_2p_3 - q_3p_2, \quad L_2 := q_3p_1 - q_1p_3, \quad L_3 := q_1p_2 - q_2p_1. \tag{7.10}$$

このとき，各 L_j は本質的に自己共役であることが証明される[*9]．したがって，その閉包 $\bar{L}_j$ は自己共役である．各 $\bar{L}_j$ を軌道角運動量の第 j 成分と呼び，$(\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3)$ を**軌道角運動量作用素**という．

この節を終えるにあたって，公理 (QM.1), (QM.2) について若干の注意をしておきたい．公理 (QM.2) にいう「物理量」として念頭にあるのは，古典物理学における物理量のいわば量子版であり，したがって，その測定値が実数となるようなものである．だが，量子力学を古典物理学よりも根源的な理論と捉える観点からは，量子力学における物理量を考察する場合，古典物理学的な意味での「物理的」という概念に固執してはならない．というのも，量子的粒子という，通常の意味では原理的に知覚不可能な対象を扱う量子力学においては，古典物理学を通して形成された，通常の "物理的" なる概念を超える新しい "物理的" 概念が登場してきても少しも不思議ではないからである[*10]．この観点からいえば，状態のヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の線形作用素，あるいはもっと広くいえば，$\mathscr{H}$ 上の写像のそれぞれが，その固有の性質に応じて，量子系の "物理" に何らかの形で関係していると考える方が自然であり，統一的なのである．先入観を捨てて量子力学の内容を精査すれば，量子力学は，実際，そのようにできていることがわかる．

量子力学は，系の自由度の有限性と無限性に応じて，2 つに分類することができる．すなわち，**有限自由度の量子力学**と**無限自由度の量子力学**である．通常，量子力学といえば，前者を指す場合が多い．だが，本書では，前者に限定しない．第 6 章で少しふれた量子場の理論は後者の範疇に入る．公理 (QM.1), (QM.2) は，いずれの範疇の量子力学に対しても通用するものである．

7.3 状態の遷移確率

量子系において，1 つの物理量を同一の状態において複数回測定したとき，その測定値はつねに同じであるとは限らず，一般には確率的に分布する．これは，

[*9] 拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) の定理 6.8 を参照．いまは，この事実を認めて先に進んで差し支えない．

[*10] そもそも量子的粒子自体，すでにそのような対象である．

量子系の基本的な特徴の1つであり，量子系と古典力学系との根本的な相異を表す性質の1つである．

例 7.5 物理量 A ($\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素) が多重度1の固有値 $a \in \mathbb{R}$ を持ち，その固有ベクトルを Ψ_a とすれば (i.e.，$A\Psi_a = a\Psi_a$)，ベクトル $\Psi \in \mathscr{H} \setminus \{0\}$ によって表される状態において A を測定したときに測定値として a が得られる確率は，$|\langle \hat{\Psi}_a, \hat{\Psi} \rangle|^2$ によって与えられる．これは，物理量の測定に関する一般的な公理から導かれる*11．

ところで，量子系の状態は，系の物理量の測定値によって同定される (ただし，一般には，共立的に測定可能な複数の物理量の測定が必要)．したがって，量子系の測定によってある測定値が得られる確率は，測定によって，ある状態 — 一般には測定前の状態とは異なる状態 — が見出される確率として解釈しなおすことができる．例 7.5 でいえば，$|\langle \hat{\Psi}_a, \hat{\Psi} \rangle|^2$ は，状態 $[\Psi]$ において系を測定したときに状態 $[\Psi_a]$ が見出される確率を表すことになる．

量子力学の測定に関する公理にしたがえば，一般に，状態 $[\Psi]$ ($\Psi \in \mathscr{H} \setminus \{0\}$) において系を測定したとき，状態 $[\Phi]$ ($\Phi \in \mathscr{H} \setminus \{0\}$) が見出される確率は

$$P([\Psi],[\Phi]) := |\langle \hat{\Phi}, \hat{\Psi} \rangle|^2 \tag{7.11}$$

によって与えられる．これは，代表元 Ψ, Φ の選び方によらず，同値類 $[\Psi], [\Phi]$ だけで決まる量であることに注意しよう (問題1)．したがって，いまの言明は意味を持つ．また，容易に見てとれるように，状態の入れ換えに関する対称性

$$P([\Psi],[\Phi]) = P([\Phi],[\Psi]) \tag{7.12}$$

も成り立つ．$P([\Psi],[\Phi])$ を状態 $[\Psi]$ と状態 $[\Phi]$ の間の**遷移確率**と呼ぶ*12．

---

*11 くわしくは，拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) の第6章や新井朝雄・江沢洋『量子力学の数学的構造 II』(朝倉書店，1999) の第3章などを参照されたい．

*12 私見によれば，この術語は，状態の概念に関するある種の誤解を招くおそれがあるが，ここでは慣習にしたがう．すでに述べたように，量子力学的状態は，ヒルベルト空間の射影空間という極度に抽象的な集合の元であり，それは通常の意味での感覚的・物理的対応物を持たない対象である．したがって，量子力学的状態は，じつは “物理的” なものではない．すると，通常の意味での状態の “遷移” という言葉は意味を持たなくなる．このように解釈するならば，いわゆる “波束 (状態) の収縮” は問題になり得ない．だが，この種の議論は，物理の問題というよりもむしろ哲学の問題になるので，ここではこれ以上論及することは控える．拙論文「量子現象によって開示される存在論的構造」(日本シェリング協会編『シェリング年報』，2006，第14号，95–103) に，量子力学に対するまったく新しい哲学的な捉え方を提示しておいたので，興味のある読者は，こちらを参照されたい．

7.4 対称性変換

この節では，量子力学における基本的な対称性の概念を定義する．まず，発見法的な考察をしよう．

任意の量子系の特性は，時間や空間が“均質”であれば，時間並進，空間並進あるいは空間回転の操作によって変化するとは考えにくい．たとえば，ある実験装置を使い，札幌で実験を行っても，その実験装置を東京に持っていって実験を行っても，得られる結果は同じはずである．つまり，系の特性は，時間並進対称性，空間並進対称性，空間回転対称性を持つ．特に，任意の 2 つの状態間の遷移確率はそのような対称性を持つ．すなわち，任意の 2 つの状態間の遷移確率は，時間並進，空間並進，空間回転のもとで保存される．一方，たとえば，空間並進の操作に伴って，状態空間での“移動”が同伴するであろう．これは，したがって，状態空間上の写像を定義する．この場合，遷移確率の空間並進対称性によって，その写像は，遷移確率を保存するもの (不変にするもの) でなければならない．時間並進や空間回転についても同様である．

いまの議論で時間並進，空間並進あるいは空間回転のことは忘れて，結論だけを取り出して見ると，量子系における抽象的なレヴェルでの対称性をどのように捉えればよいかが明らかになる．すなわち，量子系の対称性は，遷移確率を不変にする，状態空間上の写像によって表されるということである．

こうして，状態空間 $P(\mathscr{H})$ 上の写像のうち，状態間の遷移確率を保存するようなものは，量子系の基本的な対称性を定義する写像の 1 つの範疇を形成することが洞察される．そこで，そのような写像に名前をつけておく：

定義 7.6 全単射な写像 $T: P(\mathscr{H}) \longrightarrow P(\mathscr{H})$ で，すべての $[\Psi],[\Phi] \in P(\mathscr{H})$ に対して

$$P(T[\Psi],T[\Phi]) = P([\Psi],[\Phi]) \tag{7.13}$$

を満たすものを $P(\mathscr{H})$ **上の対称性変換** (symmetry transformation) と呼ぶ．

$P(\mathscr{H})$ 上の対称性変換の全体を $\mathrm{Sym}(\mathscr{H})$ と記す．

次の事実は「対称性変換」という命名の妥当性を支持する：

命題 7.7 $\mathrm{Sym}(\mathscr{H})$ は $P(\mathscr{H})$ 上の変換群である．

証明 対称性変換は $P(\mathscr{H})$ 上の変換であるから，$\mathrm{Sym}(\mathscr{H})$ は $P(\mathscr{H})$ 上の全変換群 $\mathscr{G}(P(\mathscr{H}))$ の部分集合である．そこで，任意の $T_1, T_2, T \in \mathrm{Sym}(\mathscr{H})$ に対して，$T_1T_2 \in \mathrm{Sym}(\mathscr{H}), T^{-1} \in \mathrm{Sym}(\mathscr{H})$ を示せばよい．前者は，定義から，容易に導かれる．任意の $[\Psi], [\Phi] \in P(\mathscr{H})$ に対して，$T^{-1}[\Psi] = [\chi], T^{-1}[\Phi] = [\omega]$ とおけば，$T \in \mathrm{Sym}(\mathscr{H})$ により，$P([\chi], [\omega]) = P(T[\chi], T[\omega])$．一方，右辺は $P([\Psi], [\Phi])$ に等しい．したがって，$T^{-1} \in \mathrm{Sym}(\mathscr{H})$． ■

$\mathscr{H}$ 上の写像と対称性変換の関係を見るために，ある概念を導入する．

定義 7.8 F を $\mathscr{H}$ 上の写像とする (線形である必要はない)．$\Psi, \Psi' \in \mathscr{H} \setminus \{0\}$ について $\Psi \sim \Psi'$ ならば $F(\Psi) \sim F(\Psi')$ が成り立つとき，F を**同値性保存写像**と呼ぶ．

補題 7.9 $F : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ が同値性保存写像であるための必要十分条件は，任意の $\Psi \in \mathscr{H} \setminus \{0\}$ と $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対してある定数 $\beta \neq 0$ があって，$F(\alpha\Psi) = \beta F(\Psi)$ が成り立つことである．

証明 (必要性) $F : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ は同値性保存写像であるとする．$\Phi = \alpha\Psi$ とおくと $\Phi \sim \Psi$．したがって $F(\Phi) \sim F(\Psi)$．ゆえに $F(\Phi) = \beta F(\Psi)$ を満たす定数 $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ がある．

(十分性) $\Psi \sim \Phi$ とすれば，$\Phi = \alpha\Psi$ となる $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ がある．いまの仮定により，$F(\alpha\Psi) = \beta F(\Psi)$ を満たす $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ がある．したがって，$F(\Phi) = \beta F(\Psi)$ であるので $F(\Phi) \sim F(\Psi)$． ■

補題 7.9 は，特に，$\mathscr{H}$ 上の線形作用素および反線形作用素はすべて同値性保存写像であることを語る[*13]．

写像 $F : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ が同値性保存写像であるとき，$[\Psi] = [\Phi]$ $(\Psi, \Phi \in \mathscr{H} \setminus \{0\})$ ならば $[F(\Psi)] = [F(\Phi)]$ であるから，$P(\mathscr{H})$ 上の写像 $\hat{F}$ を

$$\hat{F}[\Psi] := [F(\Psi)], \quad [\Psi] \in P(\mathscr{H}) \tag{7.14}$$

によって定義できる．

一般に，複素ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ から複素ヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ への写像 W が次の (W.1)~(W.3) を満たすとき，W を**反ユニタリ作用素**という：

(W.1) (反線形性) すべての $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，$W(\alpha\Psi + \beta\Phi) =$

[*13] $\mathscr{K}$ を複素ヒルベルト空間とする．写像 $A : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{K}$ が**反線形** (antilinear) であるとは，すべての $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，$A(\alpha\Psi + \beta\Phi) = \alpha^* A(\Psi) + \beta^* A(\Phi)$ が成り立つ場合をいう．

$\alpha^* W(\Psi) + \beta^* W(\Phi)$.

(W.2) (全射性) W は全射である：$W(\mathscr{H}) = \mathscr{K}$.

(W.3) (内積の反傾的保存) すべての $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ に対して，$\langle W(\Psi), W(\Phi)\rangle_{\mathscr{K}} = \langle \Phi, \Psi\rangle_{\mathscr{H}}$.

次の事実は容易に証明される (問題 2)：

命題 7.10 F がユニタリまたは反ユニタリならば，$\hat{F}$ は対称性変換である．すなわち $\hat{F} \in \mathrm{Sym}(\mathscr{H})$.

次の定理は，対称性変換の一般形を明らかにする非常に深い定理である：

定理 7.11 (ウィグナー (**Wigner**)–バーグマン (**Bargmann**) の定理) 各対称性変換 $T \in \mathrm{Sym}(\mathscr{H})$ に対して，$\mathscr{H}$ 上のユニタリまたは反ユニタリな作用素 U があって

$$T = \hat{U} \tag{7.15}$$

と表される．このような作用素 U は，指数因子を除いて一意的に定まる．すなわち，別に $T = \hat{W}$ となるユニタリまたは反ユニタリな作用素 $W : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ があったとすれば，$U = e^{i\theta} W$ を満たす定数 $\theta \in [0, 2\pi)$ がある．したがって，特に，(7.15) を満たす U はすべてユニタリであるか，すべて反ユニタリであるかのどちらかである．

この定理の証明は省略し，先に進むことにする[*14].

7.5 射影表現

量子系において，空間的または時間的あるいは他の何らかの "操作" を記述する群 G が与えられたとしよう[*15]．すでに前節のはじめに述べたように，G の各元 g によって記述される操作に対応して，状態の空間 $P(\mathscr{H})$ における変換 — $\rho(g)$ と書こう — が誘導されると想定するのは物理的に見て自然である．この場合，$\{\rho(g) | g \in \mathrm{G}\}$ が対称性変換の群 $\mathrm{Sym}(\mathscr{H})$ の部分群になっており，しかも G の群構造を保存すれば，これによって，ρ は，当該の量子系の群 G によって表される操作に関する対称性を記述するものとみなせるであろう．こうして，次の定義に達する：

[*14]定理 7.11 の証明については，拙著『量子現象の数理』(朝倉書店，2006) の定理 4.9 を参照.

[*15]たとえば，量子系が d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ の中にあるならば，$\mathbb{R}^d$ の回転群や並進群.

定義 7.12 G を群とする．写像 $\rho:\mathsf{G}\longrightarrow \mathrm{Sym}(\mathscr{H})$ が準同型写像であるとき，ρ を G の $P(\mathscr{H})$ における**射影表現** (projective representation) または**射線表現**という．

状態空間の部分集合 D について，すべての $g\in\mathsf{G}$ に対して $\rho(g)(D)=D$ が成り立つとき，D は G **対称**であるという．

G を群とし，$\rho:\mathsf{G}\longrightarrow \mathrm{Sym}(\mathscr{H})$ を射影表現としよう．このとき，定理 7.11 によって，各 g に対してユニタリまたは反ユニタリな作用素 $\pi(g):\mathscr{H}\longrightarrow\mathscr{H}$ があって

$$\rho(g)=\widehat{\pi(g)} \tag{7.16}$$

と書ける．したがって

$$\rho(g)[\Psi]=[\pi(g)\Psi],\quad [\Psi]\in P(\mathscr{H}),\quad g\in\mathsf{G}. \tag{7.17}$$

群 G の任意の元の対 (g,h) に対して，$\rho(gh)=\rho(g)\rho(h)$ が成り立つことと (7.17) を用いると

$$[\pi(gh)\Psi]=[\pi(g)\pi(h)\Psi],\quad [\Psi]\in P(\mathscr{H}).$$

が得られる．これは

$$\widehat{\pi(gh)}=\widehat{\pi(g)}\widehat{\pi(h)}$$

を意味する．したがって，ウィグナー–バーグマンの定理 (定理 7.11) の一意性の部分によって，絶対値が 1 の複素数 $\omega(g,h)$ があって

$$\pi(g)\pi(h)=\omega(g,h)\pi(gh) \tag{7.18}$$

が成立する．

すべての $f,g,h\in\mathsf{G}$ に対して，$(\pi(f)\pi(g))\pi(h)=\pi(f)(\pi(g)\pi(h))$ (結合則) を用いると

$$\omega(fg,h)\omega(f,g)=\begin{cases}\omega(f,gh)\omega(g,h), & \pi(f)\text{ がユニタリのとき,}\\ \omega(f,gh)\omega(g,h)^*, & \pi(f)\text{ が反ユニタリのとき}\end{cases} \tag{7.19}$$

が示される．

こうして，射影表現の一般的構造がわかる．

逆に，各 $g\in\mathsf{G}$ に対して，$\mathscr{H}$ 上のユニタリまたは反ユニタリな作用素 $\pi(g)$ があって，(7.18) が満たされるとしよう．ただし，$\omega:\mathsf{G}\times\mathsf{G}\longrightarrow\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=1\}$ は (7.19) を満たすとする．このとき，写像 $\hat{\pi}(g):P(\mathscr{H})\longrightarrow P(\mathscr{H})$ $(g\in\mathsf{G})$ を

$$\hat{\pi}(g)[\Psi]:=[\pi(g)(\Psi)],\quad [\Psi]\in P(\mathscr{H}) \tag{7.20}$$

によって定義すれば，命題 7.10 によって $\hat{\pi}(g)\in\mathrm{Sym}(\mathscr{H})$ であり，対応 $\hat{\pi}:\mathsf{G}\longrightarrow\mathrm{Sym}(\mathscr{H})$ は射影表現であることがわかる．

射影表現において，2つの特殊な場合が考えられる．

(1) ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上のユニタリ変換の全体を $\mathrm{U}(\mathscr{H})$ とする．これが群であることはすでに知っている．$\pi:\mathsf{G}\longrightarrow\mathrm{GL}(\mathscr{H});g\longmapsto\pi(g)$ を G のユニタリ表現とする．すなわち，各 $g\in\mathsf{G}$ に対して，$\pi(g)\in\mathrm{U}(\mathscr{H})$ であり

$$\pi(g)\pi(h)=\pi(gh),\quad g,h\in\mathsf{G} \tag{7.21}$$

が成り立つとする．これは，(7.18) において $\omega(g,h)\equiv 1$ の場合である．したがって，この場合の $\hat{\pi}$ は G の射影表現を与える．

(2) 写像 $\pi:\mathsf{G}\longrightarrow\mathrm{GL}(\mathscr{H});g\longmapsto\pi(g)$ は次の性質を満たすとする：(i) 各 $g\in\mathsf{G}$ に対して，$\pi(g)$ は $\mathscr{H}$ 上のユニタリまたは反ユニタリな作用素のいずれかである．(ii) (7.21) が成立する．このとき，(1) と同じ理由により，$\hat{\pi}$ は G の射影表現を与える．

7.6 外的自由度に関する物理量に対する対称性原理

古典力学において，系の配置を完全に決定するために必要とされる独立変数の個数を**自由度**と呼ぶ．たとえば，3次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中を運動する N 個の質点系の配置は $(\mathbb{R}^3)^N$ の点で表されるので，この系の自由度は $3N$ である．通常の古典力学の場合，対象の位置が基本的な変数なので，系の自由度は，物理的空間に関わる自由度に限られる．ところが量子力学では，事情は異なる．というのは，量子的粒子は，物理的空間に関わる自由度の他に，物理的空間とは独立な自由度を持ちうるからである．たとえば，**スピン**と呼ばれる量子的粒子に固有の物理量は，その種の自由度に関わるものである[*16]．そこで，それら2種類の自由度を区別して，物理的空間とは独立な自由度を**内的自由度**と呼び，それ以外の自由度を**外的自由度**と呼ぶ．この節では，量子力学において，外的自由度に関する物理量がいかなる原理から構成されるかを論述する．まず，そのための数学的準備を行う．

量子力学の物理量に関する公理 (QM.2) によれば，物理量は状態のヒルベルト空間で働く自己共役作用素で表される．したがって，物理量全体から生成される集合 — 物理量およびそれらの積の線形結合の全体 — というものが考えられる．

[*16] スピンについては，7.9 節でややくわしく論じる．

これは作用素の集合であるから，そこには，何らかの代数的構造がありうると想定するのは自然である．この構造を記述するための基本概念の 1 つをまず定義しよう．

定義 7.13 $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$ 上のリー代数とする (定義 1.86 を参照)．V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(\mathsf{V})$ を V 上の線形作用素全体のなすリー代数とする．写像 $\sigma:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(\mathsf{V})$ が線形であり

$$\sigma([x,y])=[\sigma(x),\sigma(y)],\quad x,y\in\mathfrak{g} \tag{7.22}$$

が成り立つとき，σ を $\mathfrak{g}$ の V 上での**表現**と呼び，V を**表現空間**という．表現空間が有限次元 (無限次元) のとき，σ を**有限次元 (無限次元) 表現**と呼ぶ．$d=\dim\mathsf{V}<\infty$ のとき，σ を d **次元表現**という．

σ が単射ならば，この表現は**忠実**であるという．

任意の $g\in\mathfrak{g}$ に対して，$\sigma(g)D\subset D$ となる部分空間 $D\subset\mathsf{V}$ — このような部分空間を表現 σ の**不変部分空間**という — が $\{0\}$ または V のどちらかに限るとき，表現 σ は**既約**であるという．

リー代数 $\mathfrak{g}$ の各元 x に V 上の 0 写像を対応させる写像 $\sigma(x)=0$ は $\mathfrak{g}$ の表現である．この表現を**自明な表現**と呼ぶ．

次の定義において導入するリー代数は，以下において明らかにされるように，有限自由度の量子力学の根底にある理念の 1 つである．

定義 7.14 $\mathfrak{h}$ を $(2n+1)$ 次元の複素リー代数とする $(n\in\mathbb{N})$．$\mathfrak{h}$ の基底 $E=\{X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n,Z\}$ で

$$[X_j,Y_k]=i\delta_{jk}Z, \tag{7.23}$$

$$[X_j,X_k]=0,\ [Y_j,Y_k]=0,\ [X_j,Z]=0,\ [Y_j,Z]=0\ (j,k=1,\cdots,n) \tag{7.24}$$

を満たすものがあるとき，$\mathfrak{h}$ を**ハイゼンベルク型リー代数**という．E を $\mathfrak{h}$ の標準基底と呼ぶ．

注意 7.15 $Z\neq 0$ で (7.23)～(7.24) が成り立つならば，$\{X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n,Z\}$ は線形独立であることが証明される (問題 3)．

$\mathfrak{h}$ を $(2n+1)$ 次元のハイゼンベルク型リー代数とし，$\{X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n,Z\}$ をその標準基底とする．$\mathscr{H}$ を複素ヒルベルト空間とし，$\mathscr{D}$ を $\mathscr{H}$ の部分空間とする．写像 $\sigma:\mathfrak{h}\longrightarrow\mathsf{L}(\mathscr{D})$ ($\mathscr{D}$ 上の線形作用素の全体) が $\mathfrak{h}$ の表現であり，$\sigma(Z)=\hbar I$

が成り立つとする．したがって，$\sigma(X_j)=Q_j, \sigma(Y_j)=P_j$ $(j=1,\cdots,n)$ とおけば $Q_j, P_j \in \mathsf{L}(\mathscr{D})$ であり，交換関係

$$[Q_j,P_k]=i\hbar I,\quad [Q_j,Q_k]=0,\quad [P_j,P_k]=0,\quad j,k=1,\cdots,n \tag{7.25}$$

が成り立つ．量子力学の文脈では，交換関係 (7.25) を**自由度 n の正準交換関係** (canonical commutation relations ; CCR と略) という．そこであらためて次の定義を設ける：複素ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ の稠密な部分空間 $\mathscr{D}$ と $\mathscr{H}$ 上の $2n$ 個の対称作用素の集合 $\{Q_j,P_j\}_{j=1}^n$ について，$\mathscr{D}\subset D(Q_j)\cap D(P_j)$ $(j=1,\cdots,n)$ かつすべての $\Psi\in\mathscr{D}$ に対して $Q_j\Psi, P_j\Psi\in\mathscr{D}$ $(j=1,\cdots,n)$ および $\mathscr{D}$ 上で (7.25) が成立するとき[*17]，3 つ組 $(\mathscr{H},\mathscr{D},\{Q_j,P_j\}_{j=1}^n)$ を**自由度 n の CCR の表現**と呼ぶ．この場合，$\mathscr{H}$ を**表現のヒルベルト空間**という．

各 Q_j, P_j が対称作用素 (自己共役) である場合，$(\mathscr{H},\mathscr{D},\{Q_j,P_j\}_{j=1}^n)$ を CCR の**対称 (自己共役) 表現**という[*18]．

CCR の表現のヒルベルト空間は必ず無限次元である．実際，仮に $\mathscr{H}$ が有限次元で $\dim\mathscr{H}=N$ とすれば，(7.25) で $j=k$ の場合を考え，両辺のトレースをとることができる．トレースの対称性 $\mathrm{Tr}(Q_jP_j)=\mathrm{Tr}(P_jQ_j)$ により $\mathrm{Tr}[Q_j,P_j]=0$. 一方，$\mathrm{Tr}(i\hbar I)=i\hbar N\neq 0$. したがって，矛盾が出る．

さらに，各 $j=1,\cdots,n$ に対して，**Q_j または P_j の少なくとも一方は非有界作用素である**ことも示される[*19]．

一般に，ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の線形作用素 T と部分空間 $\mathscr{D}\subset\mathscr{H}$ について，$\mathscr{D}\subset D(T)$ かつ $T(\mathscr{D})\subset\mathscr{D}$ (i.e., $\Psi\in\mathscr{D}$ ならば $T\Psi\in\mathscr{D}$) が成り立つとき，T は $\mathscr{D}$ を**不変にする**といい，$\mathscr{D}$ を T の (1 つの) **不変部分空間**という．

上述の定義においては，$\mathscr{D}$ は Q_j, P_j の不変部分空間になっている．だが，代数関係式 (7.25) を純作用素論的に考察する場合は，$\mathscr{D}$ を Q_j, P_j の不変部分空間としない場合がある．すなわち，(7.25) は $\bigcap_{j,k=1}^{n} D(Q_jP_k)\cap D(P_kQ_j)\cap D(Q_jQ_k)\cap D(P_jP_k)$ またはその部分空間上で成り立つとするのである．

[*17] ヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ 上の線形作用素 A, B について，ある部分空間 $D\subset D(A)\cap D(B)$ があって．すべての $\Psi\in D$ に対して，$A\Psi=B\Psi$ が成り立つとき，「D 上で $A=B$ が成り立つ」あるいは「$A=B$ (D 上)」という言い方をする．

[*18] 括弧には括弧を対応させて読む．

[*19] 拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) の命題 6.7 や新井朝雄・江沢 洋『量子力学の数学的構造 II』(朝倉書店，1999) の定理 3.23 を参照．

例 7.16 $L^2(\mathbb{R}^d)$ における位置作用素と運動量作用素の組 $\{q_j, p_j\}_{j=1}^d$ は自由度 d の CCR の自己共役表現である．実際，たとえば，部分空間 $\mathscr{D}$ として $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ をとれば，各 q_j, p_j は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を不変にし，$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で CCR を満たすことがわかる．CCR の表現 $(L^2(\mathbb{R}^d), C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \{q_j . p_j\}_{j=1}^d)$ を **CCR のシュレーディンガー表現**と呼ぶ．

例 7.17 複素数列 $\psi = \{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ $(\psi_n \in \mathbb{C})$ で絶対値の 2 乗が総和可能，すなわち $\sum_{n=0}^\infty |\psi_n|^2 < \infty$ を満たすもの全体を $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ と記す $(\mathbb{Z}_+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$ は非負整数の全体$)$．これは，数列の和 $\psi + \phi := \{\psi_n + \phi_n\}_{n=0}^\infty$ とスカラー倍 $\alpha\psi := \{\alpha\psi_n\}_{n=0}^\infty$ $(\phi = \{\phi_n\}_{n=0}^\infty \in \ell^2(\mathbb{Z}_+), \alpha \in \mathbb{C})$ に関して，複素ベクトル空間になる．さらに

$$\langle \psi, \phi \rangle := \sum_{n=0}^\infty \psi_n^* \phi_n$$

を内積とする複素ヒルベルト空間である．$\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ の部分空間

$$\ell_0(\mathbb{Z}_+) := \left\{ \psi = \{\psi_n\}_{n=0}^\infty \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある番号 } n_0 \geq 0 \text{ があって，} \\ n \geq n_0 \text{ ならば } \psi_n = 0 \end{array} \right\}$$

は $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ で稠密である．$\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ 上の線形作用素 a を次のように定義する：

$$D(a) := \left\{ \psi = \{\psi_n\}_{n=0}^\infty \in \ell^2(\mathbb{Z}_+) \;\middle|\; \sum_{n=0}^\infty (n+1)|\psi_{n+1}|^2 < \infty \right\},$$

$$(a\psi)_n := \sqrt{n+1} a_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

$\ell_0(\mathbb{Z}_+) \subset D(a)$ だから $D(a)$ は稠密である．したがって，その共役作用素 a^* が存在する．これは次のように同定されることがわかる[*20]：

$$D(a^*) = \left\{ \psi = \{\psi_n\}_{n=0}^\infty \;\middle|\; \sum_{n=1}^\infty \sqrt{n} |\psi_{n-1}|^2 < \infty \right\},$$

$$(a^*\psi)_0 = 0, \quad (a^*\psi)_n := \sqrt{n}\psi_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

直接計算により

$$[a, a^*] = I \quad (\ell_0(\mathbb{Z}_+) \text{ 上}) \tag{7.26}$$

が成り立つことがわかる．そこで，線形作用素 $q_{\mathrm{H}}, p_{\mathrm{H}}$ を次のように定義する：

$$q_{\mathrm{H}} := \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2}}(a^* + a), \quad p_{\mathrm{H}} := \frac{i\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2}}(a^* - a).$$

[*20] 以下の諸事実の証明については，拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) の第 7 章の練習問題 8 を参照．

このとき，(7.26) を使って計算することにより

$$[q_{\rm H}, p_{\rm H}] = i\hbar I \quad (\ell_0(\mathbb{Z}_+)\ \text{上}) \tag{7.27}$$

を示すことができる．証明は略すが，$\bar{q}_{\rm H}$ ($q_{\rm H}$ の閉包) と $\bar{p}_{\rm H}$ は自己共役である．以上から，$(\ell^2(\mathbb{Z}_+), \ell_0(\mathbb{Z}_+), (\bar{q}_{\rm H}, \bar{p}_{\rm H}))$ は自由度1のCCRの自己共役表現である．このCCRの表現を**ボルン–ハイゼンベルク–ヨルダン表現**と呼ぶ．この型の表現は任意の有限自由度の場合にも構成される．

7.1節で例としてあげた物理量はすべてCCRのシュレーディンガー表現の作用素からつくられている．他方，ボルン–ハイゼンベルク–ヨルダン表現を用いて物理量を構成し，量子力学を展開することもできる．当然，他のCCRの表現でも同様に展開できるはずである．こうした事情を考慮するならば (それだけではないが)，次の原理に到る：

公理 (QM.3)　外的自由度が n の量子系の状態のヒルベルト空間は，自由度 n のCCRの自己共役表現のヒルベルト空間であり，系の物理量は，この表現から構成される．

筆者の知る限り，この公理 — 状態のヒルベルト空間がどういう性格のものでなければならないか，その性格の1つを語る公理 — は，通常，陽には提示されていない．しかし，量子力学のいろいろなモデルの構造を調べると，どのモデルにもこの公理が共通していることが見てとれる．そこで，筆者は，対称性という観点から，この公理を**量子力学における基本対称性原理**と呼ぶ．

公理 (QM.3) の観点からは，CCRの自己共役表現を分類する問題が基本的な問題の1つとして浮上してくる．そのための概念が表現の同値性の概念である：

定義 7.18　$\pi := (\mathscr{H}, \mathscr{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^n)$ と $\pi' := (\mathscr{H}', \mathscr{D}', \{Q_j', P_j'\}_{j=1}^n)$ を2つのCCRの表現とする (自己共役である必要はない)．もし，ユニタリ変換 $U : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}'$ で

$$UQ_jU^{-1} = Q_j', \quad UP_jU^{-1} = P_j', \quad j = 1, \cdots, n$$

を満たすものがあるならば，π と π' は**同値**であるという．

公理 (QM.3) によれば，2つの量子系がCCRの同値な自己共役表現によって記述されるならば，対応する物理量はすべてユニタリ同値であるので，両方の系の物理はまったく同一であると結論される．

例 7.19 自由度 n のシュレーディンガー表現とボルン–ハイゼンベルク–ヨルダン表現は同値であることを証明できる*[21]. ゆえに，どちらの表現による量子力学も物理的にはまったく同じ結果を与える．歴史的には，シュレーディガーによる量子力学 (1926) とボルン–ハイゼンベルク–ヨルダンによる量子力学 (1925) が，その外見の違いにも関わらずなぜ同一の結果を生むのかは，当初，謎であったが，この謎は，CCR の表現の同値性という観点から解かれるのである．では，外見上の違い，すなわち表現空間の違いとは何かといえば，それは，量子的粒子に対して第一義的に据える物理的描像の違いなのである．シュレーディンガー表現の場合は，量子的粒子に粒子的描像をあてはめ，その位置を測るという観測設定が暗黙のうちになされているのである．他方，ボルン–ハイゼンベルク–ヨルダン表現の方は，粒子的描像ではなく ($q_{\rm H}$ は位置を表すものでない)，系のエネルギーの観測に関わる描像なのである：$\omega>0$ を定数とするとき，$\hbar\omega a^*a$ は調和振動子のハミルトニアンを表し，とびとびの固有値 $n\hbar\omega$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を持つ．a はエネルギー量子を 1 つ減らす作用素であり，a^* はエネルギー量子を 1 つ増やす作用素である．

注意 7.20 CCR の強い形式として，**ヴァイル (Weyl) 表現**がある．これはヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素の組 $\{Q_j,P_j\}_{j=1}^n$ で，**ヴァイル関係式**

$$e^{itQ_j}e^{isP_k}=e^{-ist\delta_{jk}}e^{isP_k}e^{itQ_j},$$

$$e^{itQ_j}e^{isQ_k}=e^{isQ_k}e^{itQ_j},\quad e^{itP_j}e^{isP_k}=e^{isP_k}e^{itP_j},$$

$$s,t\in\mathbb{R},\quad j,k=1,\cdots,n$$

を満たすもののことである*[22]. これに関しては，もし $\mathscr{H}$ が可分ならば，$\{Q_j, P_j\}_{j=1}^n$ はシュレーディンガー表現の直和に同値であることが証明される (フォン・ノイマンの一意性定理)*[23]. しかし，**もともとの CCR の表現に関しては，この定理の結論は一般には成立しない**ことを強調しておく*[24].

同一の量子系が，同値な CCR の表現の数だけ (外見上) 異なる形式によって記述されるという構造は，まさに，量子的粒子の巨視的描像が一義的でなく相補的

*[21] 新井朝雄・江沢 洋『量子力学の数学的構造 II』(朝倉書店，1999) の 3.8.6 項を参照.

*[22] 自己共役作用素 A に対して，作用素 e^{itA} $(t\in\mathbb{R})$ は $\langle\Psi,e^{itA}\Phi\rangle=\int_{\mathbb{R}}e^{it\lambda}d\langle\Psi,E_A(\lambda)\Phi\rangle$ $(\Psi,\Phi\in\mathscr{H})$ (E_A は A のスペクトル測度) を満たすユニタリ作用素である (拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) の 3 章や新井朝雄・江沢 洋『量子力学の数学的構造 I』(朝倉書店，1999) の

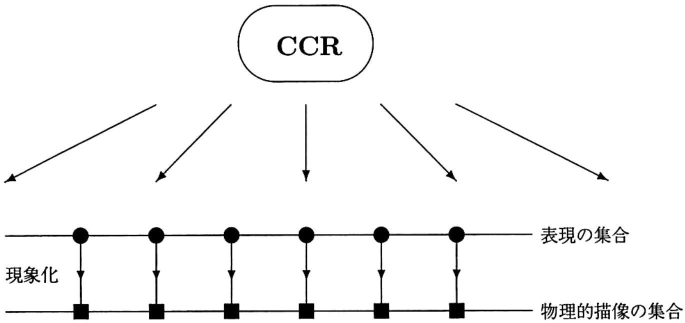


図 7.1 CCR, 表現，物理的描像.

であること，いいかえれば，量子的粒子の現象的多重性と見事に呼応しているのである．CCR の表現空間は，量子力学の文脈では，量子的粒子に対する特定の描像 — それは，観測装置の設定と不可分の関係にあり，数学的には，表現された Q_j や P_j から定まる物理量に対する描像 — に対応している．こうして，フォン・ノイマンによって打ち立てられた，座標から自由なヒルベルト空間形式による量子力学の公理論的定式化が，いかに哲学的にも優れているかが明らかになる (図 7.1).

7.7 ユニタリ表現と物理量

この節では，時間的あるいは空間的操作の群のユニタリ表現を通して物理量が定義されることを見る．そのための準備として，数学的な事柄をいくつか復習しておく．

定義 7.21 各実数 t に対して $\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素 $U(t)$ が定まり，次の性質 (U.1), (U.2) が成り立つとき，$\{U(t)|t\in\mathbb{R}\}$ を $\mathscr{H}$ 上の**強連続 1 パラメータユニタ**

2 章を参照).

*[23] くわしくは，拙著『量子現象の数理』(朝倉書店，2006) の 3.5 節を参照.

*[24] このように注意しなければならないのは，物理学の教科書や文献の中には，フォン・ノイマンの一意性定理があるから，シュレーディンガー表現で考えれば十分であるといった，誤った主張をしているものが見られるからである．シュレーディンガー表現に非同値な表現で物理的に興味のある例については，前掲書の 3.6 節を参照されたい.

リ群と呼ぶ.

(U.1) (**群特性**) $U(t+s)=U(t)U(s)$ $(\forall t, s\in\mathbb{R})$.

(U.2) (**強連続性**) $\lim_{s\to 0}\|U(t+s)\Psi-U(t)\Psi\|=0$ $(\forall\Psi\in\mathscr{H})$.

(U.1) は，対応 $U:\mathbb{R}\longrightarrow U(t)$ が並進群 $\mathbb{R}$ のユニタリ表現であることを意味する．このユニタリ表現を 1 次元並進群 $\mathbb{R}$ の**強連続ユニタリ表現**と呼ぶ.

例 7.22 A を n 次のエルミート行列とし $U_A(t)=e^{itA}$ とすれば，例 1.78 によって，U_A は，n 次元複素ヒルベルト空間 $\mathbb{C}^n$ 上での 1 次元並進群 $\mathbb{R}$ の強連続ユニタリ表現である.

一般に，$\mathbb{R}$ から $\mathscr{H}$ への写像 $\Psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathscr{H};\mathbb{R}\ni t\longmapsto\Psi(t)\in\mathscr{H}$ について，すべての $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$\frac{d\Psi(t)}{dt}:=\lim_{s\to 0}\frac{\Psi(t+s)-\Psi(t)}{s}$$

が存在するとき，Ψ は $\mathbb{R}$ 上で**強微分可能**であるといい，$d\Psi(t)/dt$ を Ψ の**強微分**と呼ぶ.

例 7.23 (**例 7.22 の一般化**) 複素ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の各自己共役作用素 A に対して，$\mathscr{H}$ 上での $\mathbb{R}$ の強連続ユニタリ表現 U_A で微分方程式

$$-i\frac{d}{dt}U_A(t)\Psi=AU_A(t)\Psi=U_A(t)A\Psi,\quad \Psi\in D(A) \tag{7.28}$$

を満たすものが唯ひとつ存在する (定理)*25．ユニタリ作用素 $U_A(t)$ は $U_A(t)=e^{itA}$ と表される.

次の定理は $\mathbb{R}$ の強連続ユニタリ表現に関する基本定理であり，純理論的にも応用上もきわめて重要である*26：

定理 7.24 (**ストーン (Stone) の定理**) $\{U(t)|t\in\mathbb{R}\}$ を $\mathscr{H}$ 上の強連続 1 パラメータユニタリ群とする．このとき，$\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素 A が唯ひとつ存在して $U(t)=e^{itA}$ $(t\in\mathbb{R})$ が成り立つ．さらに

$$D(A)=\left\{\Psi\in\mathscr{H}\,\middle|\,\lim_{s\to 0}\frac{U(s)\Psi-\Psi}{s}\text{ が存在}\right\} \tag{7.29}$$

かつ

---

*25 証明については，拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) の第 4 章，4.3.3 項，あるいは新井朝雄・江沢 洋『量子力学の数学的構造 II』の定理 3.38 を参照.

*26 証明については，前掲書を参照.

$$A\Psi = -i \lim_{s\to 0} \frac{U(s)\Psi - \Psi}{s} \tag{7.30}$$

が成り立つ．

この定理にいう自己共役作用素 A を強連続1パラメータユニタリ群 $\{U(t)|t\in\mathbb{R}\}$ の**生成子**という[*27]．式 (7.30) は，生成子を $U(t)$ から求める式である．

量子力学の物理量に関する公理 (QM.2) を思い出すならば，ストーンの定理にいう自己共役作用素 A は，量子力学の文脈では1つの物理量でありうる．したがって，ストーンの定理は，量子力学の文脈では，$\mathbb{R}$ の強連続ユニタリ表現に1つの物理量が付随しうることを語る[*28]．これはまったく一般的な構造なので，有限自由度の量子力学だけでなく無限自由度の量子力学である量子場の理論にも適用可能である．以下，具体的な例を見てみよう．

7.7.1　ハミルトニアン

量子系の時間発展を考える．これは時刻0の状態ベクトル $\Psi\in\mathscr{H}$ に対して，時刻 $t\in\mathbb{R}$ に1つの状態ベクトル $\Psi(t)\in\mathscr{H}$ — 時刻 t での状態ベクトル — が対応する構造である[*29]．$\mathscr{H}$ 上の写像 $U(t)$ を

$$U(t)\Psi := \Psi(t), \quad \Psi\in\mathscr{H} \tag{7.31}$$

によって定義する．前節の考察により，対応 $U: t\longmapsto U(t)$ は，時間並進群としての $\mathbb{R}$ のユニタリ表現であると仮定できる．この場合，U が強連続であると仮定するのも自然であろう．すると，ストーンの定理により

$$U(t) = e^{-it\tilde{H}}, \quad t\in\mathbb{R}$$

となる自己共役作用素 $\tilde{H}$ が唯ひとつ存在する[*30]．

この作用素の物理的な意味を調べるには，たとえば，考察下の系がエネルギー定常状態を持つ場合を考えるとよい．これは，時刻 t での状態ベクトルが $\Psi(t) =$

[*27] 任意の零でない実数 a に対して，$U(t) = e^{i(t/a)aA}$ であるので，A の定数倍も $U(t)$ の生成子と呼ぶ場合がある．

[*28] 強連続ユニタリ表現の変数 t は必ずしも時間を表すものではなく，物理的には，考察する対称性に応じて異なる意味を持つ．以下の例を参照．

[*29] すでに述べたように，筆者の解釈では，量子力学的状態は“物理的”なものではないから，それは通常の意味での時間発展はしない．ここでいう時間発展という言葉は，象徴以上の意味を持たない．

[*30] A を定理 7.24 にいう自己共役作用素とすれば，$\tilde{H} = -A$．

$e^{-itE/\hbar}\Psi_E$ ($\Psi_E \in \mathscr{H}\setminus\{0\}$) という形で表される状態であり，$E\in\mathbb{R}$ が状態のエネルギーを表す．したがって，$e^{-it\tilde{H}}\Psi_E = e^{-itE/\hbar}\Psi_E$．両辺を t について強微分し $t=0$ とおけば，$\Psi_E \in D(\tilde{H})$ かつ $\tilde{H}\Psi_E = (E/\hbar)\Psi_E$ が成り立つ．そこで

$$H := \hbar\tilde{H}$$

を導入すれば，E は H の固有値である．したがって，H は，物理的には，系のエネルギーを表す作用素，すなわちハミルトニアンであると解釈される．この解釈を系がエネルギー定常状態を持たない場合にも拡大するのは自然である．

こうして，時間発展を表すユニタリ作用 $U(t)$ は，ハミルトニアン H を用いて

$$U(t) = e^{-itH/\hbar}, \quad t\in\mathbb{R} \tag{7.32}$$

と表される．(7.28) により，任意の $\Psi \in D(H)$ に対して $\Psi(t) := U(t)\Psi$ とおけば

$$i\hbar\frac{d\Psi(t)}{dt} = H\Psi(t) \tag{7.33}$$

が成り立つ．この型の微分方程式を，ハミルトニアン H に関する**シュレーディンガー方程式**という．これは，状態ベクトルの時間発展を表す微分方程式である．

時間発展のユニタリ作用素 $U(t)$ を用いて，時間並進対称な状態を定義することができる．状態ベクトル $\Psi \in \mathscr{H}$ が**時間並進対称**あるいは**時間並進不変**であるとは，すべての $t\in\mathbb{R}$ に対して $U(t)\Psi = \Psi$ が成り立つときをいう．

命題 7.25 状態ベクトル $\Psi \in \mathscr{H}$ が時間並進対称であるための必要十分条件は「$\Psi \in \ker H$」(i.e., $\Psi \in D(H)$ かつ $H\Psi = 0$) である．

証明 (必要性) $U(t)\Psi = \Psi$ ならば $(U(t)\Psi - \Psi)/t = 0$ なので，$\lim_{t\to 0}(U(t)\Psi - \Psi)/t$ は存在し，それは零ベクトルに等しい．したがって，定理 7.24 により $\Psi \in D(H)$ かつ $H\Psi = 0$.

(十分性) $\Psi \in \ker H$ とする．(7.28) の 2 番目の等式を $A = -H$ の場合に応用すれば，$d\Psi(t)/dt = 0$. $\Psi(t)$ は t によらないので，$\Psi(t) = \Psi(0) = \Psi$. したがって，Ψ は時間並進対称である． ■

この命題の要点は，時間並進に関して対称な状態を，それを定義する群の生成子を用いて特徴づけたということである．つまりこれは，リー代数的レヴェルにおける対称性の捉え方の基本的な例の 1 つを与える．

例 7.26 状態のヒルベルト空間を $\mathbb{C}^2$ とし，ハミルトニアンが 2 次のエルミート行列

$$H := \mu\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

($\mu > 0$ は定数) によって与えられる系を考える．このような系は **2 準位系**と呼ばれる．容易にわかるように H の固有値は μ と 0 だけであり，$\psi_0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とすれば $H\psi_0 = 0$. したがって ψ_0 は，考察下の系における時間並進対称な状態ベクトルである．

7.7.2　運動量作用素

$\mathbb{R}^d = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d) | x_j \in \mathbb{R}\ (j = 1, \cdots, d)\}$ において，x_j 軸方向の空間並進 $T_a^{(j)}$ $(a \in \mathbb{R})$ を考えよう：

$$T_a^{(j)}(\boldsymbol{x}) := (x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_j + a, x_{j+1}, \cdots, x_d), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

この並進に応じて状態のヒルベルト空間上にユニタリ作用素 $U_j(a)$ が 1 つ定まるとし，$\{U_j(a) | a \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{R}$ の強連続ユニタリ表現であるとする．このときストーンの定理により

$$U_j(a) = e^{-iaP_j/\hbar}, \quad a \in \mathbb{R} \tag{7.34}$$

となる自己共役作用素 P_j が唯ひとつ存在する．この場合，P_j は運動量の第 j 成分を表す作用素であると解釈される (いまの文脈では a は長さの次元をもつので，P_j の次元は運動量の次元であることに注意).

ユニタリ作用素 $U_j(a)$ を用いて，空間並進対称な状態を定義することができる．状態ベクトル $\Psi \in \mathscr{H}$ が x_j 方向に**空間並進対称**あるいは**空間並進不変**であるとは，すべての $a \in \mathbb{R}$ に対して，$U_j(a)\Psi = \Psi$ が成り立つときをいう．

命題 7.27 状態ベクトル $\Psi \in \mathscr{H}$ が x_j 方向に空間並進対称であるための必要十分条件は「$\Psi \in \ker P_j$」である．

証明　命題 7.25 で，H の代わりに P_j を考えればよい． ■

例 7.28 ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の写像 $U_j(a)$ を

$$(U_j(a)f)(\boldsymbol{x}) := f(T_{-a}^{(j)}(\boldsymbol{x})), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

によって定義すれば，$\{U_j(a) | a \in \mathbb{R}\}$ は，$\mathbb{R}$ の強連続ユニタリ表現であることがわ

かる[*31]．(7.30) を用いて計算すると，この場合の P_j は

$$P_j f = p_j = -i\hbar D_j$$

となることが示される[*32]．つまり，P_j は，CCR のシュレーディンガー表現における運動量の第 j 成分に他ならない．ゆえに，CCR のシュレーディンガー表現における運動量作用素は，空間並進群の強連続ユニタリ表現の生成子として捉えられる．

$P_j f = 0$ ならば，f はある定数 c_f に等しいが (一般化された偏微分作用素 D_j の場合,「$D_j f = 0$ ならば f は定数」という命題の証明は自明ではないが，ここではこれを認めて進む)，$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ であるから，$c_f = 0$ が結論される．したがって，$f = 0$. ゆえに，この例では，空間並進対称な状態は存在しない．

1.8 節で見たように，線形リー群の生成子はリー代数をなす．そこで，いまの場合にリー代数的構造をみるために，運動量作用素の交換子を計算してみる．容易にわかるように

$$[p_j, p_k] = 0 \quad (C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ 上})$$

が成り立つ．つまり，p_j と p_k は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で可換である．そこで，ベクトル空間 $\left\{ \sum_{j=1}^{d} a_j p_j \middle| a_j \in \mathbb{R} \right\}$ (和とスカラー倍は，$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素としてのそれであり，零ベクトルは，$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上の零作用素) を考えると，これは交換子をリー括弧積とする実リー代数である．

7.7.3 軌道角運動量作用素

3 次元ユークリッドベクトル空間 $\mathbb{R}^3 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) | x_j \in \mathbb{R}\ (j = 1,2,3)\}$ の x_j 軸のまわりの角度 θ の回転変換を $R_j(\theta)$ で表そう：

$$R_1(\theta) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_2(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{7.35}$$

[*31] 強連続性の証明は自明ではない．これについては，拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) の例 4.7 を参照されたい．

[*32] この事実の厳密な証明は簡単ではない (形式的・発見法的には容易に推測される)．拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) の例 4.7 を参照．だが，いまは，この事実を認めて先に進んでも差し支えない．

$$R_3(\theta):=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{7.36}$$

各 $R_j(\theta)$ はいずれも 3 次元回転群 SO(3) の元である．容易にわかるように

$$R_j(\theta+\chi)=R_j(\theta)R_j(\chi)=R_j(\chi)R_j(\theta),\quad \theta,\chi\in\mathbb{R} \tag{7.37}$$

が成り立つ．したがって，特に

$$\mathsf{R}_j:=\{R_j(\theta)\,|\,\theta\in\mathbb{R}\},\quad j=1,2,3 \tag{7.38}$$

は SO(3) の可換な部分群をなす．

他方

$$T_j:=R_j'(0)\quad (R_j(\theta)\text{ の }\theta=0\text{ での微分}) \tag{7.39}$$

とおけば

$$T_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{7.40}$$

$$T_3=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{7.41}$$

であり

$$R_j(\theta)=e^{\theta T_j} \tag{7.42}$$

が成り立つ[*33]．いうまでもなく，各 T_j は SO(3) のリー代数 $\mathfrak{so}(3)$ の元であり，直接計算により，交換関係

$$[T_1,T_2]=T_3,\quad [T_2,T_3]=T_1,\quad [T_3,T_1]=T_2 \tag{7.43}$$

を満たすことがわかる．

さて，各 $\theta\in\mathbb{R}$ に対して写像 $U_j(\theta):L^2(\mathbb{R}^3)\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ を

$$(U_j(\theta)f)(\boldsymbol{x}):=f(R_j(-\theta)(\boldsymbol{x})),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3, f\in L^2(\mathbb{R}^3) \tag{7.44}$$

によって定義しよう．このとき $\{U_j(\theta)\,|\,\theta\in\mathbb{R}\}$ は，$\mathbb{R}$ の強連続ユニタリ表現である

---

*33 $e^{\theta T_1}=\sum_{n=0}^{\infty}\theta^n T_1^n/n!$ と $T_1^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -I_2\end{pmatrix}$ を用いると，$e^{\theta T_1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (\cos\theta)I_2\end{pmatrix}+(\sin\theta)T_1=R_1(\theta)$. $e^{\theta T_2}, e^{\theta T_3}$ についても同様．別証として行列 $R_j(\theta)$ が微分方程式 $dR_j(\theta)/d\theta=T_jR_j(\theta)=R_j(\theta)T_j$ を満たすことを用いてもよい．

ことがわかる[*34]．したがって，ストーンの定理により

$$U_j(\theta)=e^{-i\theta M_j/\hbar}$$

となる自己共役作用素 M_j が唯ひとつ存在する．(7.30) を用いて M_j を計算すると，$C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で

$$M_1=L_1=q_2p_3-q_3p_2, \quad M_2=L_2=q_3p_1-q_1p_3, \quad M_3=L_3=q_1p_2-q_2p_1$$

が成り立つことがわかる (例 7.4 を参照)．したがって $M_j=\bar{L}_j$．すなわち，(M_1, M_2, M_3) は CCR のシュレーディンガー表現における軌道角運動量に他ならない．この意味を明らかにするために，写像 $\rho_j:\mathsf{R}_j\longrightarrow \mathrm{GL}(L^2(\mathbb{R}^3))$ を

$$\rho_j(R_j(\theta)):=U_j(\theta) \tag{7.45}$$

によって定義しよう．このとき，(7.37) によって，ρ_j は回転群の部分群 R_j の $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上でのユニタリ表現であることがわかる．上の結果から

$$\rho_j(R_j(\theta))=e^{-i\theta\bar{L}_j/\hbar} \tag{7.46}$$

と書ける．こうして，軌道角運動量の第 j 成分 $\bar{L}_j$ は，回転群の部分群 R_j のユニタリ表現 ρ_j の各要素 $\rho_j(R_j(\theta)$ の生成子として特徴づけられることがわかる．

直接計算により，$C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で次の交換関係が成り立つことがわかる：

$$[L_1,L_2]=i\hbar L_3, \quad [L_2,L_3]=i\hbar L_1, \quad [L_3,L_1]=i\hbar L_2. \tag{7.47}$$

したがって，ベクトル空間

$$\mathfrak{l}:=\left\{\sum_{j=1}^3 a_jL_j \,\middle|\, a_j\in\mathbb{C}\right\} \tag{7.48}$$

は複素リー代数をなす．問題 3 と同様にして L_1, L_2, L_3 は線形独立であることがわかる．したがって $\{L_1,L_2,L_3\}$ は $\mathfrak{l}$ の基底であり，$\dim\mathfrak{l}=3$ である．

交換関係 (7.47) を手短に書き表すために，記号 $\epsilon_{k\ell m}$ $(k,\ell,m\in\{1,2,3\})$ — **レヴィ–チビタ記号**と呼ばれる — を次のように定義する：

$$\epsilon_{jk\ell}:=\begin{cases}1, & j,k,\ell \text{ が } 1,2,3 \text{ の偶置換のとき,}\\ -1, & j,k,\ell \text{ が } 1,2,3 \text{ の奇置換のとき,}\\ 0, & j,k,\ell \text{ のうち同じものが } 2 \text{ つ以上ある場合.}\end{cases} \tag{7.49}$$

[*34] ユニタリ性と 1 次元並進群 $\mathbb{R}$ の表現であることは容易に示される．だが，強連続性の証明は簡単ではない．これについては，拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) の定理 6.8 の証明を参照．

このとき，(7.47) は

$$[L_j, L_k] = \sum_{\ell=1}^{3} i\hbar\epsilon_{jk\ell} L_\ell, \quad j,k=1,2,3 \tag{7.50}$$

と表される．

部分群 R_j の生成子 T_j に対して

$$\hat{T}_j := i\hbar T_j, \quad j=1,2,3 \tag{7.51}$$

という行列を定義すれば，(7.43) から，これらは軌道角運動量と同じ交換関係

$$[\hat{T}_j, \hat{T}_k] = \sum_{\ell=1}^{3} i\hbar\epsilon_{jk\ell} \hat{T}_\ell, \quad j,k=1,2,3 \tag{7.52}$$

を満たすことがわかる．したがって，リー代数 $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$ の部分空間

$$\mathfrak{so}_{\mathbb{C}}(3) := \left\{ \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \hat{T}_j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{C} \right\} \tag{7.53}$$

は複素リー代数をなす．このリー代数を $\mathfrak{so}(3)$ の**複素化**と呼ぶ．$\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3$ は線形独立なので，これらは $\mathfrak{so}_{\mathbb{C}}(3)$ の基底を形成し，したがって，$\dim \mathfrak{so}_{\mathbb{C}}(3) = 3$ である．

(7.50) と (7.52) に着目して，写像 $f : \mathfrak{so}_{\mathbb{C}}(3) \longrightarrow \mathfrak{l}$ を

$$f(X) = \sum_{j=1}^{3} a_j L_j, \quad X = \sum_{j=1}^{3} a_j \hat{T}_j \in \mathfrak{so}_{\mathbb{C}}(3) \ (a_j \in \mathbb{C}) \tag{7.54}$$

によって定義する．このとき，次の定理が成り立つ：

定理 7.29 $\mathfrak{so}_{\mathbb{C}}(3)$ と $\mathfrak{l}$ は写像 f のもとで，リー代数として同型である[*35]．

証明 f の線形性と全単射性は容易に示される．$Y = \sum_{j=1}^{3} b_j \hat{T}_j$ とすれば

$$f([X,Y]) = \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k f([\hat{T}_j, \hat{T}_k]) = \sum_{j.k=1}^{3} a_j b_k \sum_{\ell=1}^{3} i\hbar\epsilon_{jk\ell} f(\hat{T}_\ell).$$

一方

$$\begin{aligned}[f(X), f(Y)] &= \sum_{j.k=1}^{3} a_j b_k [L_j, L_k] = \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k \sum_{\ell=1}^{3} i\hbar\epsilon_{jk\ell} L_\ell \\ &= \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k \sum_{\ell=1}^{3} i\hbar\epsilon_{jk\ell} f(\hat{T}_\ell).\end{aligned}$$

したがって，$f([X,Y]) = [f(X), f(Y)]$. ゆえに，f は準同型である． ■

---

*35 リー代数の同型の概念については，1.8 節を参照．

(7.54) によって定義される写像 f は，$\mathfrak{so}_{\mathbb{C}}(3)$ から $\mathsf{L}(C_0^\infty(\mathbb{R}^3))$ ($C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上の線形作用素の空間) への写像と見ることができる．この観点からは，定理 7.29 は，f が $\mathfrak{so}_{\mathbb{C}}(3)$ の忠実な表現であることを語る．こうして，シューレーディンガー表現における軌道角運動量は，3 次元回転群のリー代数 $\mathfrak{so}_{\mathbb{C}}(3)$ の $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上における忠実な表現の基底として捉えられる．

状態ベクトルの回転対称性は次のように定義される．すべての $\theta\in\mathbb{R}$ に対して，$U_j(\theta)f=f$ を満たす状態ベクトル $f\in L^2(\mathbb{R}^3)$ は，x_j **軸のまわりの回転対称性**を持つという．

時間並進対称性や空間並進対称性の場合とまったく同様にして次の命題が得られる：

命題 7.30 状態ベクトル $f\in L^2(\mathbb{R}^3)$ が x_j 軸のまわりの回転対称性を持つための必要十分条件は「$f\in\ker\bar{L}_j$」である．

例 7.31 $g:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{C}$ を連続微分可能な関数とし，$f(\boldsymbol{x}):=g(|\boldsymbol{x}|)$ とすれば，f は，各軸のまわりの回転対称性を持つ．これは，$|R_j(-\theta)\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}|$ $(\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3)$ による．

7.8 物理量の時間発展と保存量

任意の量子系 S を考え，その状態のヒルベルト空間を $\mathscr{H}$，ハミルトニアンを H とする．$\mathscr{H}$ 上の線形作用素 A に対して

$$A_H(t):=e^{itH/\hbar}Ae^{-itH/\hbar} \tag{7.55}$$

によって定義される作用素 $A_H(t)$ を，H に関する A の**ハイゼンベルク作用素**と呼ぶ．これは物理的には，A の "時間発展" を記述するものである．

作用素 $A_H(t)$ が t によらず一定のとき，したがって $A_H(t)=A$ $(\forall t\in\mathbb{R})$ が成り立つとき，A は系 S の**保存量**であるという．

命題 7.32 A が保存量であるための必要十分条件は，任意の $s\in\mathbb{R}$ に対して，$e^{-isH}D(A)=D(A)$ かつ $D(A)$ 上で e^{isH} と A が可換であること ($[e^{isH},A]\Psi=0$ $(\forall\Psi\in D(A))$) である．

証明 (必要性) A が保存量であるとする．このとき，$D(e^{isH}Ae^{-isH})=D(A)$ $(\forall s\in\mathbb{R})$ かつすべての $e^{isH}Ae^{-isH}\Phi=A\Phi$ $(\Phi\in D(A))$．一方，作用素の積の定義域の定義によれば，$D(e^{isH}Ae^{-isH})=\{\Phi\in\mathscr{H}\,|\,e^{-isH}\Phi\in D(A)\}=e^{isH}D(A)$．し

たがって $e^{-isH}D(A)=D(A)$. ゆえに，任意の $\Psi\in D(A)$ に対して $\Psi=e^{-isH}\Phi$ を満たす $\Phi\in D(A)$ がある．よって $e^{isH}A\Psi=Ae^{isH}\Psi$.

(十分性) 前段の議論の逆を辿ればよい. ■

命題 7.33 A を稠密に定義された閉作用素とする．A が保存量ならば，任意の $\Psi\in D(HA)\cap D(H)$ に対して $\Psi\in D(HA)\cap D(AH)$ であり

$$[H,A]\Psi=0 \tag{7.56}$$

が成り立つ.

証明 仮定により，任意の $\Phi\in D(A^*)$ と $\Psi\in D(HA)\cap D(H)$ に対して，

$$\left\langle A^*\Phi,\frac{e^{-isH}-1}{s}\Psi\right\rangle=\left\langle \Phi,\frac{e^{-isH}-1}{s}A\Psi\right\rangle,\quad s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

極限 $s\longrightarrow 0$ をとり，ストーンの定理を応用すれば，$\langle A^*\Phi,H\Psi\rangle=\langle\Phi,HA\Psi\rangle$ を得る．これは，$H\Psi\in D(A^{**})=D(A)$ (したがって，$\Psi\in D(AH)$) かつ $AH\Psi=HA\Psi$ を意味する. ■

注意 7.34 H,A の少なくとも一方が非有界作用素の場合には，(7.56) が成立しても (すなわち，H,A は可換)，A は保存量になるとは限らない．この点については，物理学の文献では，誤った記述が見られる場合があるので注意されたい．非有界作用素の可換性については繊細で微妙な側面がある．しかもそれは，物理現象との対応においても本質的である (くわしくは，新井朝雄・江沢 洋『量子力学の数学的構造 II』(朝倉書店，1999) の 3.2 節や拙著『量子現象の数理』(朝倉書店，2006) の 3 章を参照).

次の定理は，保存量と対称性の関係の 1 つを語る：

定理 7.35 線形作用素 A は保存量で固有値 $a\in\mathbb{C}$ を持つとし，その固有空間を $\mathscr{K}_a$ とする ($\mathscr{K}_a=\ker(A-a)$)．このとき，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $e^{-itH/\hbar}\mathscr{K}_a=\mathscr{K}_a$, すなわち $\mathscr{K}_a$ は $e^{-itH/\hbar}$ 対称である.

証明 $\Psi\in\mathscr{K}_a$ を任意にとる：$A\Psi=a\Psi$. A は保存量であるから $Ae^{-itH/\hbar}\Psi=e^{-itH/\hbar}A\Psi=ae^{-itH/\hbar}\Psi$. したがって $e^{-itH/\hbar}\Psi\in\mathscr{K}_a$. ゆえに $e^{-itH/\hbar}\mathscr{K}_a\subset\mathscr{K}_a$. これは，$\mathscr{K}_a\subset e^{itH/\hbar}\mathscr{K}_a$ を意味する．この式で，t を $-t$ とすれば，前の結果と合わせることにより，$e^{-itH/\hbar}\mathscr{K}_a=\mathscr{K}_a$ が得られる. ■

この定理の内容を平たくいえば，保存量の固有空間は，系の状態の時間発展において不変に保たれるということである.

7.9 スピン角運動量

すでに 7.6 節のはじめで示唆したように，量子的粒子は，外的な自由度だけでなく，内的な自由度も持ち得る．内的な自由度に関わる対称性は，**内部対称性**と呼ばれる．この節では，内的な自由度のうち，スピンと呼ばれる自由度に関する内部対称性について入門的な部分を叙述する．

7.9.1 スピン角運動量の特徴

量子的粒子は，空間的な運動に関する角運動量，すなわち，軌道角運動量の他に，**スピン角運動量**と呼ばれる固有の角運動量を持っている．スピン角運動量の大きさは，s を非負の整数または半奇数 $(1/2,3/2,5/2,\cdots,(2n-1)/2,\cdots)$ として，$s\hbar$ という形に表される．s の値は，各量子的粒子に固有のものである．スピンの大きさが $s\hbar$ である量子的粒子を**スピン s の量子的粒子**と呼ぶ ($\hbar$ を単位として測る)．たとえば，電子，陽子，中性子はスピン 1/2 の量子的粒子であり，中性中間子，荷電中間子はいずれもスピン 0 の量子的粒子である．一般に，スピン s の量子的粒子は，$2s+1$ 個の相異なる固有状態をとりうる．これらの固有状態を**スピン固有状態**という．ただし，質量 0 の量子的粒子は例外的でありうる．たとえば，光子はスピン 1 の量子的粒子であるが，光子のスピン固有状態は 2 つである．

スピン角運動量は，発見法的には，軌道角運動量と同様に，しかるべき複素ヒルベルト空間上の 3 個の自己共役作用素 S_1,S_2,S_3 の組 $\boldsymbol{S}:=(S_1,S_2,S_3)$ によって記述されると想定される．この場合，そのヒルベルト空間と作用素 S_j がどのような性質を持つべきかを調べることが第一の問題になる．この問題を解くためのアイディアの 1 つは，軌道角運動量の表現論的な特質，すなわち，7.7.3 項で示したように，軌道角運動量 $(\bar{L}_1,\bar{L}_2,\bar{L}_3)$ は，3 次元回転群 SO(3) の部分群 R_j $(j=1,2,3)$ の $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上でのユニタリ表現の生成子であり，部分空間 $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で特徴的な交換関係 (7.47) を満たし，ある複素リー代数を形成するという性質である．しかも，この構造は，部分群 R_j の生成子が有する交換関係 (7.43) に呼応するものであり，自然なものであった．この構造を抽象化し，それをスピン角運動量にも当てはめてみる．ここでは，定理 7.29 に注目し，S_1,S_2,S_3 は適当なヒルベルト空間上の自己共役作用素で，ある複素リー代数の基底であり，関係式

$$[S_j,S_k]=\sum_{\ell=1}^{3} i\hbar\epsilon_{jk\ell}S_\ell, \quad j,k=1,2,3 \tag{7.57}$$

にしたがうという作業仮説をたてる[36]．この場合，軌道角運動量の場合との類推に基づいて，各ユニタリ作用素 $e^{-i\theta S_j/\hbar}$ は，実空間 $\mathbb{R}^3$ の x_j 軸のまわりの角度 θ の回転に対応する "内的な回転" を表すと解釈する．

例 7.36 有限次元複素ヒルベルト空間でもっとも単純で非自明なものは $\mathbb{C}^2$ である．このヒルベルト空間上で働く自己共役作用素 (2 次のエルミート行列) σ_j ($j=1,2,3$) を次のように定義する：

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.58}$$

これらの行列は**パウリ行列**と呼ばれ，次の特徴的な性質を持つ (いずれも直接計算によって証明される)：

$$\sigma_j^2 = I_2, \quad j=1,2,3, \tag{7.59}$$

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2, \tag{7.60}$$

$$\{\sigma_j,\sigma_k\} = 2\delta_{jk}I_2, \quad j,k=1,2,3. \tag{7.61}$$

ただし，I_2 は 2 次の単位行列であり，$\{X,Y\} := XY+YX$ (**反交換子**)．したがって

$$s_j := \frac{\hbar}{2}\sigma_j, \quad j=1,2,3 \tag{7.62}$$

とおけば

$$[s_1,s_2] = i\hbar s_3, \quad [s_2,s_3] = i\hbar s_1, \quad [s_3,s_1] = i\hbar s_2 \tag{7.63}$$

が成り立つ．ゆえに，(s_1,s_2,s_3) は交換関係 (7.57) を満たす．(7.59) と $\sigma_j \neq \pm I_2$ から，σ_j の固有値は ± 1 でいずれも多重度 1 であることがわかる (もちろん，固有値問題を直接解いてもよい)．したがって，s_j の固有値は $\pm\hbar/2$ であり，いずれも多重度 1 である．ゆえに，s_j はスピン 1/2 の量子的粒子のスピンの成分作用素を記述すると解釈される．この場合，線形独立な s_j の 2 つの固有ベクトルが 2 つの相異なるスピン固有状態を表す．また，ユニタリ行列

$$u_j(\theta) := e^{-i\theta s_j/\hbar} \quad (\theta \in \mathbb{R}) \tag{7.64}$$

は，x_j 軸のまわりの角度 θ の回転に対応する内的な回転を表す．$is_j/\hbar = i\sigma_j/2$ は 2 次元特殊ユニタリ群 SU(2) のリー代数 $\mathfrak{su}(2)$ の元であるから (表 1.1 参照)，内的な回転 $e^{-i\theta s_j/\hbar}$ は SU(2) の元である．ゆえに，スピン 1/2 の量子的粒子の内的な

---

[36] 群の表現論的なレヴェルでの定式化も可能であるが，これについては，ここでは省略する．

回転に関する対称性は，SU(2) に関する対称性として表される．行列の指数関数の定義と (7.59) を用いると $u_j(\theta)$ は次のように表されることがわかる (問題 4 の応用)：

$$u_1(\theta)=\cos\frac{\theta}{2}I_2-i\sigma_1\sin\frac{\theta}{2}=\begin{pmatrix}\cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2)\\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)\end{pmatrix}, \tag{7.65}$$

$$u_2(\theta)=\cos\frac{\theta}{2}I_2-i\sigma_2\sin\frac{\theta}{2}=\begin{pmatrix}\cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2)\\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)\end{pmatrix}, \tag{7.66}$$

$$u_3(\theta)=\cos\frac{\theta}{2}I_2-i\sigma_3\sin\frac{\theta}{2}=\begin{pmatrix}e^{-i\theta/2} & 0\\ 0 & e^{i\theta/2}\end{pmatrix}. \tag{7.67}$$

ここで次の点に注意しよう．すなわち，考察下の内的な回転においては，$\theta=2\pi$ の場合 (実空間での 1 回転) に恒等作用素が対応しないということである．実際

$$u_j(2\pi)=-I_2. \tag{7.68}$$

これは，実空間の回転と本質的に異なる性質の 1 つである (いうまでもなく，実空間では，1 回転しても何も変わらない：$R_j(2\pi)=I_3$)．じつは，u_j 自体は部分群 R_j のユニタリ表現ではなく，次に述べる意味において，R_j の射影表現を決める対象なのである．すなわち，各 $R_j(\theta)\in\mathsf{R}_j$ に対して，$\rho_j(R_j(\theta)):P(\mathbb{C}^2)\longrightarrow P(\mathbb{C}^2)$ を

$$\rho_j(R_j(\theta))[\psi]:=[u_j(\theta)\psi],\quad \psi\in\mathbb{C}^2$$

によって定義すれば，これは $P(\mathbb{C}^2)$ 上の対称性変換であることは容易に確かめられる．そこで，対応 $\rho_j:\mathsf{R}_j\longrightarrow \mathrm{Sym}(\mathbb{C}^2);R_j(\theta)\longmapsto\rho_j(R_j(\theta))$ を考えると，これは R_j の射影表現であることがわかる．

すでに注意したように，交換関係 (7.57) は，軌道角運動量の成分が満たす交換関係と同じである．これは，軌道角運動量およびスピン角運動量が，それぞれ，より普遍的な対象の特殊形態であることを示唆する．この普遍的対象を見出すには，交換関係 (7.57) 自体を 1 つの抽象的なリー代数を定義する関係式と見る観点へと移行することである．こうして，次の定義へと到る：

定義 7.37 $\mathfrak{J}$ を 3 次元の複素リー代数とする．$\mathfrak{J}$ の基底 $\{J_1,J_2,J_3\}$ で

$$[J_j,J_k]=\sum_{\ell=1}^{3}i\hbar\epsilon_{jk\ell}J_\ell,\quad j,k=1,2,3 \tag{7.69}$$

を満たすものが存在するとき，$\mathfrak{J}$ を**角運動量代数**と呼ぶ．

例 7.38 s_1, s_2, s_3 を例 7.36 におけるエルミート行列とするとき，s_1, s_2, s_3 によって生成される ($\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ の) 部分空間

$$\mathfrak{s}_{1/2} := \left\{ \sum_{j=1}^{3} \alpha_j s_j \,|\, \alpha_j \in \mathbb{C}\ (j=1,2,3) \right\}$$

は角運動量代数である ($\{s_1, s_2, s_3\}$ はこの部分空間の基底である).

じつは，この角運動量代数は，次に述べる意味で，2 次元特殊ユニタリ群 SU(2) のリー代数 $\mathfrak{su}(2)$ (これは実リー代数) の “複素版” と見ることができる．例 1.84 で見たように

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathsf{M}_2(\mathbb{C}) \,|\, X^* + X = 0, \operatorname{Tr} X = 0\}. \tag{7.70}$$

したがって，任意の $X \in \mathfrak{su}(2)$ は，

$$X = \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix} = ai\sigma_3 + ci\sigma_1 + bi\sigma_2$$

と表される．ただし，a, b, c は実数である．これと $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ は $\mathfrak{su}(2)$ の線形独立な元であることに注意すれば，$\mathfrak{su}(2)$ は 3 次元の実リー代数であることがわかる．$\mathfrak{su}(2)$ から

$$\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2) := \{X + iY \,|\, X, Y \in \mathfrak{su}(2)\} \tag{7.71}$$

という集合をつくると，これは複素リー代数であることがわかる．これを $\mathfrak{su}(2)$ の**複素化**と呼ぶ．任意の $X + iY \in \mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2)$ は

$$X + iY = (a' + ia)\sigma_3 + (c' + ic)\sigma_1 + (b' + ib)\sigma_2$$

という形に表される (a, b, c, a', b', c' は実数)．逆に，任意の実数 a, b, c, a', b', c' に対して，上式の右辺は $\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2)$ の元である．$\sigma_j = 2s_j/\hbar$ であるから

$$\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2) = \mathfrak{s}_{1/2} \tag{7.72}$$

が証明されたことになる．ゆえに，$\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2)$ はスピン 1/2 の量子的粒子を記述する角運動量代数の例であることがわかる．

写像 $F : \mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2) \longrightarrow \mathfrak{J}$ を

$$F(s) := \sum_{k=1}^{3} \alpha_k J_k,\ s = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k s_k \in \mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2), \quad \alpha_k \in \mathbb{C}\ (k=1,2,3) \tag{7.73}$$

によって定義する．このとき，定理 7.29 とまったく同様にして，次の定理が証明される：

定理 7.39 $\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2)$ と角運動量代数 $\mathfrak{J}$ は，写像 F のもとで，リー代数として同型である．

角運動量代数という理念自体は抽象的なものであるので，量子力学への応用においては，これを具象化する構造が必要である．これを可能にするのが，リー代数の表現という一般概念である (定義 7.13)．

定理 7.39 によって，角運動量代数の表現は $\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2)$ の表現であり，この逆も成り立つ．この意味において，角運動量代数の表現は，具象的なレヴェルでは，$\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2)$ の表現と考えることができる．

例 7.40 写像 $\sigma:\mathfrak{J}\longrightarrow\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$ を

$$\sigma(J):=\sum_{k=1}^{3}\alpha_k s_k,\quad J=\sum_{j=k}^{3}\alpha_k J_k\in\mathfrak{J},\quad \alpha_k\in\mathbb{C}\ (k=1,2,3)$$

によって定義すれば，これは角運動量代数 $\mathfrak{J}$ の $\mathbb{C}^2$ 上での忠実な表現である．さらに，この表現は既約である (以下の命題 7.42 を参照)．いまの場合，$\sigma(J_k)=s_k$ であるので，スピン 1/2 のスピン角運動量は，角運動量代数の忠実かつ既約な 2 次元表現として捉えられる．

例 7.41 写像 $\sigma:\mathfrak{J}\longrightarrow\mathfrak{gl}(C_0^\infty(\mathbb{R}^3))$ ($\mathsf{V}=C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ の場合) を

$$\sigma(J):=\sum_{k=1}^{3}\alpha_k L_k,\quad J=\sum_{j=k}^{3}\alpha_k J_k\in\mathfrak{J},\quad \alpha_k\in\mathbb{C}$$

によって定義すれば，これは角運動量代数 $\mathfrak{J}$ の $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上での忠実な表現である．この場合，$\sigma(J_k)=L_k$ であるので，軌道角運動量は，角運動量代数の無限次元表現として捉えられる．

7.9.2 角運動量代数の有限次元表現

V を N 次元複素ヒルベルト空間 ($N\geq 1$)，σ を角運動量代数 $\mathfrak{J}$ の V 上での表現とし

$$S_k:=\sigma(J_k),\quad k=1,2,3, \tag{7.74}$$

$$\boldsymbol{S}:=(S_1,S_2,S_3) \tag{7.75}$$

とおく．したがって，交換関係

$$[S_1,S_2]=i\hbar S_3,\quad [S_2,S_3]=i\hbar S_1,\quad [S_3,S_1]=i\hbar S_2 \tag{7.76}$$

が成り立つ．以下では，各 S_k が自己共役である場合を考える．このような表現を**自己共役表現**と呼ぶ．この型の表現については，次の命題が成り立つ．

命題 7.42 角運動量代数$\mathfrak{J}$の2次元の非自明な自己共役表現は既約である．

証明 σを$\mathfrak{J}$の2次元の自己共役表現とする．仮に，σが既約でないとすると，V の1次元部分空間Dで$S_jD \subset D$ $(j=1,2,3)$を満たすものが存在する．Dの基底の1つを$\{u\}$ $(u \in D \setminus \{0\})$とすれば，$D$の任意の元$x$は$x=\alpha u$と書ける$(\alpha \in \mathbb{C})$．$S_jx \in D$であるから，$S_jx=\lambda_x^{(j)}u$と書ける$(\lambda_x^{(j)} \in \mathbb{C})$．すると，$[S_j,S_k]x=0$となるので，$S_jx=0$ $(j=1,2,3)$が成り立つ．S_jの自己共役性は，S_jがDの直交補空間$D^\perp$も不変にすることを導く．これも1次元部分空間であるから$(\because \dim \mathsf{V}=2)$，$D$の場合と同様にして$S_jy=0$ $(\forall y \in D^\perp)$．したがって，V 上で$S_j=0$ $(j=1,2,3)$となる．だが，これは表現の非自明性に反する． ■

注意 7.43 いまの証明は，$\mathfrak{J}$の1次元表現は自明なものしか存在しないことを語る．

さて，作用素S_jは自己共役であり，V は有限次元であるから，S_jは必ず固有値をもち（S_jのすべての固有値は実数），S_jの相異なる固有値の個数はN以下である．この事実を念頭において，S_3の固有値を求めることを考える*37．

補題 7.44

$$S_\pm := \frac{S_1 \pm iS_2}{\sqrt{2}} \tag{7.77}$$

とすれば

$$[S_3,S_\pm]=\pm\hbar S_\pm, \tag{7.78}$$

$$[S_+,S_-]=\hbar S_3 \tag{7.79}$$

が成り立つ．

証明 交換子$[X,Y]=XY-YX$の計算については，簡単に証明できる次の公式を使うと便利である$(n,m \in \mathbb{N})$：

$$[X,Y]=-[Y,X], \tag{7.80}$$

$$\left[\sum_{j=1}^n a_jX_j, \sum_{k=1}^m b_kY_k\right]=\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^m a_jb_k[X_j,Y_k],$$

$$a_j,b_k \in \mathbb{C} \ (j=1,\cdots,n,k=1,\cdots,m). \tag{7.81}$$

---

*37 (7.76) はS_1,S_2,S_3の巡回置換$S_1 \longrightarrow S_2, S_2 \longrightarrow S_3, S_3 \longrightarrow S_1$に関して不変であるから，$S_3$のかわりに，$S_1,S_2$を考えてもよい．

(7.81) を使うと，$[S_3,S_\pm]=2^{-1/2}([S_3,S_1]\pm i[S_3,S_2])$. そこで，(7.76) と (7.80) を用いると，右辺は $2^{-1/2}(i\hbar S_2\pm\hbar S_1)=\pm\hbar S_\pm$ となることがわかる．したがって，(7.78) が成立する．

同様に，$[S_+,S_-]=2^{-1}i([S_2,S_1]-[S_1,S_2])$. そこで，(7.76) の第 1 式を使えば，(7.79) が得られる． ■

補題 7.45 $\lambda\hbar$ を S_3 の固有値とし，これに属する固有ベクトルを ψ_λ とすれば

$$S_3(S_\pm\psi_\lambda)=(\lambda\pm 1)\hbar S_\pm\psi_\lambda \tag{7.82}$$

が成り立つ．

証明 補題 7.44 により

$$\begin{aligned} S_3S_\pm\psi_\lambda &= (\pm\hbar S_\pm + S_\pm S_3)\psi_\lambda = (\pm\hbar S_\pm+\lambda\hbar S_\pm)\psi_\lambda \\ &= (\lambda\pm 1)\hbar S_\pm\psi_\lambda. \end{aligned}$$

■

補題 7.45 は，次のことを意味する：

(i) $S_+\psi_\lambda\neq 0$ ならば $(\lambda+1)\hbar$ は S_3 の固有値である．

(ii) $S_-\psi_\lambda\neq 0$ ならば $(\lambda-1)\hbar$ は S_3 の固有値である．

この事実に基づいて，S_+ を**昇作用素**，S_- を**降作用素**と呼ぶ場合がある．

補題 7.46 S_3 の最大固有値を $s\hbar$, その固有ベクトルの 1 つを ψ_s とし

$$\psi_{s-k}:=S_-^k\psi_s,\quad k=1,2,\cdots \tag{7.83}$$

とする．このとき

$$S_3\psi_{s-k}=(s-k)\hbar\psi_{s-k},\quad k=1,2,\cdots \tag{7.84}$$

が成り立つ．

証明 k に関する帰納法による．$k=1$ の場合は補題 7.45 による．$k=n$ の場合に (7.84) が成り立つとする．このとき

$$\begin{aligned} &S_3\psi_{s-(n+1)} \\ &= S_3S_-\psi_{s-n}=[S_3,S_-]\psi_{s-n}+S_-S_3\psi_{s-n} \\ &= -\hbar S_-\psi_{s-n}+(s-n)\hbar\psi_{s-(n+1)}=(s-(n+1))\hbar\psi_{s-(n+1)}. \end{aligned}$$

したがって，(7.84) は $k=n+1$ の場合も成り立つ． ■

補題 7.47 $k=1,2,\cdots,$ に対して

$$c_k := \frac{\hbar}{2}[s(s+1)-(s-k)(s-k+1)]$$

とおく．このとき

$$S_+\psi_{s-k} = c_k\psi_{s-k+1} \tag{7.85}$$

が成り立つ．

証明 k に関する帰納法で証明する．補題 7.45 と固有値 $s\hbar$ の最大性により，$S_+\psi_s=0$. したがって，$S_+\psi_{s-1}=S_+S_-\psi_s=S_3\psi_s+S_-S_+\psi_s=s\hbar\psi_s$ 一方，$c_1=s\hbar$. したがって，$k=1$ のときの (7.85) は成立する．

次に，$k=n$ のとき，(7.85) が成立したとする：$S_+\psi_{s-n}=c_n\psi_{s-n+1}$. このとき，$S_+\psi_{s-n-1}=S_+S_-\psi_{s-n}=S_3\psi_{s-n}+S_-S_+\psi_{s-n}=[(s-n)\hbar+c_n]\psi_{s-n}$. 一方，$(s-n)\hbar+c_n=c_{n+1}$. よって，(7.85) は $k=n+1$ のときも成り立つ． ■

補題 7.48 $2s+1$ は自然数であって (したがって，s は非負整数または半奇数)，$s\hbar,(s-1)\hbar,\cdots,-(s-1)\hbar,-s\hbar$ は S_3 の固有値である．

証明 S_3 の固有値の個数は有限個であるから，ある自然数 k があって，$\psi_{s-k+1}\neq 0$ かつ $\psi_{s-k}=0$ となる．したがって，補題 7.47 から，このような k に対しては $c_k=0$. これから，$k=2s+1$. したがって，$2s+1$ は自然数である．この場合，$s\hbar,\cdots,(s-k+1)\hbar$ は S_3 の固有値であり，$s-k+1=-s$ であるから，固有値についての事実が出る． ■

補題 7.49 表現 σ が既約ならば，$N=2s+1$ であり，S_3 の各固有値の多重度は 1 で，その固有値の集合は $\{m\hbar|m=-s,-s+1,\cdots,s-1,s\}$ である．

証明 ψ_{s-k} $(k=0,1,\cdots,2s)$ で生成される部分空間を D とすれば，$S_3,S_\pm$ が D を不変にすることは，$S_3\psi_{s-k}=(s-k)\hbar\psi_{s-k}, S_+\psi_{s-k}=c_k\psi_{s-k+1}$，$S_-\psi_{s-k}=\psi_{s-k-1}, S_+\psi_s=0, \psi_{-s-1}=0$ よりは明らか．一方，$S_1=(S_++S_-)/\sqrt{2}, S_2=(S_+-S_-)/(i\sqrt{2})$ であるから，D は S_1,S_2 によっても不変である．したがって，D は S_1,S_2,S_3 によって不変．ゆえに，既約性により，$D=\mathsf{V}$ $(\because D\neq\{0\})$. $\dim D=2s+1$ であるから (自己共役作用素の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交するから，ψ_{s-k} $(k=0,\cdots,2s)$ は線形独立)，$N=2s+1$. もし，S_3 が $s\hbar,(s-1)\hbar,\cdots,-(s-1)\hbar,-s\hbar$ 以外に固有値を持てば，それに属する固有ベクトルは ψ_{s-k} に直交するから，$N>2s+1$ となって矛盾．ゆえに，S_3 は $s\hbar,(s-1)\hbar,\cdots,-(s-

$1)\hbar, -s\hbar$ 以外に固有値を持たない．これらの固有値の数は $(2s+1)$ 個であるから，各固有値の多重度は 1 でなければならない． ■

以上の結果をまとめると，次の定理が証明されたことになる：

定理 7.50 σ, V と S_1, S_2, S_3 を上述のものとする．さらに，σ は既約であるとする．このとき，非負整数または半奇数 s が存在して，次の (i)〜(iii) が成り立つ：

(a) $\dim \mathsf{V} = 2s+1$.

(b) S_3 の固有値の集合は $\{s\hbar, (s-1)\hbar, \cdots, -(s-1)\hbar, -s\hbar\}$ であり，各固有値の多重度は 1 である．

(c) ψ_s を S_3 の固有値 $s\hbar$ に属する固有ベクトルとすれば，S_3 の固有値 $m\hbar$ ($m = -s, -s+1, \cdots, s$) に属する固有ベクトルは，定数倍を除いて ψ_m((7.83) によって定義されるベクトル) で与えられ，$\{\psi_m\}_{m=-s,-s+1,\cdots,s}$ は V の直交基底である．さらに

$$S_+\psi_m = c_{s-m}\psi_{m+1}, \quad S_-\psi_m = \psi_{m-1}, \quad m = -s, -s+1, \cdots, s \tag{7.86}$$

が成り立つ．ただし，$\psi_{s+1} := 0, \psi_{-s-1} := 0$ とする．

上述の議論において，S_1, S_2, S_3 の役割を換えて考察することにより，S_1, S_2 も $s\hbar, (s-1)\hbar, \cdots, -(s-1)\hbar, -s\hbar$ を固有値として持つこともわかる．

S_3 の固有状態を $\psi_{-s}, \psi_{-s+1}, \cdots, \psi_s$ という順番に並べて，右側へ向かう向きを "上方"，左側へ向かう向きを "下方" としよう．すると，(7.86) は，次のことを語る：昇作用素 S_+ は，S_3 の固有値 $m\hbar$ の状態を 1 つ上の状態に写し，降作用素 S_- は 1 つ下の状態に写す．したがって，特に，スピン 1/2 の量子的粒子の場合には，S_+ はスピン成分 S_3 の固有値が $-1/2$ の状態を $+1/2$ の状態に写し，S_- はその逆の働きをする．これは，スピン成分 S_3 の固有値が $+1/2$ の状態と $-1/2$ の状態との関連を与える構造である．

一般に，角運動量代数の自己共役表現 σ (上述のものとは限らない) において，$\sigma(J_3)$ の固有値を表現 σ の**ウェイト** (重み) と呼び，$\sigma(J_3)$ の最大の固有値を**最高ウェイト**という．上の場合でいえば，$s\hbar$ が最高ウェイトである．じつは，角運動量代数 (あるいは $\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2)$) の有限次元の既約な自己共役表現で最高ウェイトが $s\hbar$ のものは，同値な表現を除いて，上述のものでつくされることが証明される[*38]．

[*38] 山内恭彦・杉浦光夫『連続群論入門』(培風館，1960) の III 章，§4 を参照．

次に，定理7.50における数 s を別の作用素を用いて特徴づけよう．そのために，スピン運動量の絶対値の2乗を記述する作用素

$$\boldsymbol{S}^2 := S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \tag{7.87}$$

を考える．交換関係 (7.76) を用いると，$\boldsymbol{S}^2$ と S_3 は可換であること，すなわち

$$[\boldsymbol{S}^2, S_3] = 0 \tag{7.88}$$

が成り立つことがわかる．したがって，$\boldsymbol{S}^2$ は S_3 の固有空間を不変にする．S_3 の固有値 $m\hbar$ の多重度は1であったから,，各 $m = -s, -s+1, \cdots, s$ に対して，実定数 λ_m があって，$\boldsymbol{S}^2\psi_m = \lambda_m\psi_m$ が成り立つ．定数 λ_m を求める1つのやり方は，$\boldsymbol{S}^2$ を $S_\pm, S_3$ を用いて表すことである．$S_\pm$ の定義式を S_1, S_2 について解くと

$$S_1 = \frac{S_+ + S_-}{\sqrt{2}}, \quad S_2 = \frac{S_+ - S_-}{\sqrt{2}i}$$

となる．これと (7.79) を用いると

$$\boldsymbol{S}^2 = 2S_-S_+ + \hbar S_3 + S_3^2 \tag{7.89}$$

が得られる．したがって

$$\boldsymbol{S}^2\psi_m = 2S_-S_+\psi_m + \hbar^2(m + m^2)\psi_m.$$

一方

$$\begin{aligned}
S_-S_+\psi_m &= S_-(S_+S_-)\psi_{m+1} = S_-(\hbar S_3 + S_-S_+)\psi_{m+1} \\
&= \hbar^2(m+1)S_-\psi_{m+1} + S_-^2S_+\psi_{m+1} \\
&= \hbar^2(m+1)\psi_m + S_-^2(S_+S_-)\psi_{m+2} \\
&= \hbar^2(m+1)\psi_m + S_-^2(\hbar S_3 + S_-S_+)\psi_{m+2} \\
&= \hbar^2\{(m+1) + (m+2)\}\psi_m + S_-^3S_+\psi_{m+2} \\
&= \cdots = \hbar^2\{(m+1) + (m+2) + \cdots + s\}\psi_m \\
&= \frac{1}{2}\{(s(s+1) - m(m+1)\}\hbar^2\psi_m.
\end{aligned}$$

ここで，$S_+\psi_s = 0$ を用いた．したがって

$$\boldsymbol{S}^2\psi_m = s(s+1)\hbar^2\psi_m. \tag{7.90}$$

ゆえに，$\lambda_m = s(s+1)$ であり，λ_m は m によらない．これは，$\boldsymbol{S}^2$ が V 上で定数 $s(s+1)\hbar^2$ をかける定数作用素であることを意味する．こうして，角運動量代数の既約表現の表現空間の次元 $2s+1$ を決める数 s は $\boldsymbol{S}^2$ の固有値と関連していること

がわかる．

スピン角運動量を角運動量代数の有限次元の既約な自己共役表現として捉えるならば，定理 7.50 は次のことを語る：スピンの大きさの可能な値は非負整数または半奇数 s であり，スピンの状態空間の次元は $2s+1$ である．この場合，$s(s+1)\hbar^2$ は，スピン角運動量の絶対値の 2 乗を表す．こうして，この節のはじめに述べたスピン角運動量の性質が見事に説明される．定理 7.50 にいう角運動量代数の表現は**スピン s の表現**と呼ばれる．

7.10 アイソスピン

7.10.1 核子

原子核は陽子 (p) と中性子 (n) からなる．陽子どうし (p-p)，中性子どうし (n-n)，陽子と中性子 (p-n) の間には**核力**と呼ばれる，電気力よりも強い引力が働くことが実験的に確認される．この力に特徴的なことは，その大きさが，p-p, n-n, p-n のいずれの場合でもほぼ同じだということである．この性質を核力の**荷電独立性**という．また，p と n の質量差は非常に小さい (p, n の質量はそれぞれ，約 938.3[Mev], 939.6[Mev])．そこで，この微小な質量差を電磁相互作用によるものとみなすと，核力に関しては，陽子と中性子は，ある同一（アイソ (iso)）の素粒子の "内部状態" の 2 つの異なる現れあるいは "姿" と見ることが可能である．この素粒子を**核子** (nucleon) と呼ぶ．なお，量子場の理論の観点からは，核力は，核子どうしが π 中間子を交換することによって生み出されるとされる．

核子が内部状態として陽子と中性子を持つという性質は，空間的な自由度とは独立なものであって，ある内部自由度の現れと見ることができる．そこで，スピン 1/2 の量子的粒子の場合と同様に，この内部自由度は，2 次元複素ヒルベルト空間 $\mathscr{H}_{\mathrm{N}}$ (典型的には $\mathbb{C}^2$) における $\hbar=1$ の場合の角運動量代数の自己共役表現で記述されると仮定する[*39]．すなわち，$\mathscr{H}_{\mathrm{N}}$ 上の 3 つの自己共役作用素の組 $\boldsymbol{I}:=(I_1,I_2,I_3)$ で

$$[I_1,I_2]=iI_3,\quad [I_2,I_3]=iI_1,\quad [I_3,I_1]=iI_2 \tag{7.91}$$

を満たすものを考えるのである．$\boldsymbol{I}$ を核子の**アイソスピン**または**荷電スピン**と呼ぶ．すでに見たように，I_3 の固有値は $\pm 1/2$ で，いずれも多重度は 1 である．

---

*39 「N」は nucleon の N.

I_3 の固有値 $1/2, -1/2$ に属する固有ベクトル $u_{\rm p}, u_{\rm n} \in \mathscr{H}_{\rm N} \setminus \{0\}$ をそれぞれ，陽子，中性子の状態を表すベクトルと解釈する．核子の一般の状態ベクトル u は，これらの状態ベクトルの重ね合わせ $u = au_{\rm p} + bu_{\rm n}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ によって表される．$\{u_{\rm p}, u_{\rm n}\}$ を $\mathscr{H}_{\rm N}$ の基底にとったときの，状態ベクトル u の成分表示 (a,b) を核子の**アイソ 2 重項**という．スピン 1/2 の量子的粒子の場合と同様に，陽子状態は，中性子状態に昇作用素をほどこすことによって得られ，中性子状態は，陽子状態に降作用素をほどこすことによって得られる (定理 7.50 に続く叙述を参照)．このように陽子状態と中性子状態は関連しあっている．

$\mathscr{H}_{\rm N} = \mathbb{C}^2$ のとき，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，e^{-tiI_k} $(k = 1,2,3)$ は 2 次元特殊ユニタリ群 SU(2) の元であるので，スピン 1/2 の量子的粒子の場合と同様，核子のアイソスピンに関する対称性 (内部対称性) は，群のレヴェルでは，SU(2) の表現によって表される．

7.10.2　π 中間子

π 中間子には，電荷を持った中間子 $\pi^{\pm}$ と電荷が 0 の中間子 (中性中間子) π^0 の 3 種類がある．これらも 1 つの素粒子の 3 つの状態の現れと見ることができる．この単一素粒子をあらためて π 中間子と呼ぶ．したがって，π 中間子の状態は，$\hbar = 1$ の場合の角運動量代数の 3 次元表現の既約な自己共役表現 (定理 7.50 で $s = 1$ の場合) — 前項と同じ記号 $\{I_1, I_2, I_3\}$ で表す — を用いて記述されると考えるのが自然である．すなわち，I_1, I_2, I_3 は 3 次元複素ヒルベルト空間 $\mathscr{H}_\pi$ (典型的には $\mathbb{C}^3$) 上の自己共役作用素で交換関係 (7.91) を満たすものとする．この場合の $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2, I_3)$ を中間子の**アイソスピン**または**荷電スピン**と呼ぶ．定理 7.50 により，I_3 の固有値は $1, 0, -1$ で，いずれも多重度は 1 である．物理的には，I_3 の固有値 $1, 0, -1$ に属する固有ベクトル $u_+, u_0, u_- \in \mathscr{H}_\pi \setminus \{0\}$ をそれぞれ，π^+，π^0，π^- の状態ベクトルと解釈する．核子の場合と同様に，中間子の一般の状態ベクトル u は，$u_{\pm}, u_0$ の重ね合わせ $u = a_+u_+ + a_0u_0 + a_-u_-$ $(a_{\pm}, a_0 \in \mathbb{C})$ によって表される．$\{u_+, u_0, u_-\}$ を $\mathscr{H}_\pi$ の基底にとったときの，状態ベクトル u の成分表示 (a_+, a_0, a_-) を π 中間子の**アイソ 3 重項**と呼ぶ．中間子の 3 つの固有状態 $u_{\pm}, u_0$ は，昇作用素と降作用素の作用により互いにうつりあう．

$\mathscr{H}_{\rm N} = \mathbb{C}^3$ のとき，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，e^{-tiI_k} $(k = 1,2,3)$ は 3 次元特殊ユニタリ群 SU(3) の元であるから，π 中間子の内部対称性の群は SU(3) である．

7.10.3 他のアイソスピン

アイソスピンの考え方，すなわち，1つの量子的粒子の異なる状態として，“類似” の量子的粒子を統一的に捉えていく考え方は，核子や π 中間子以外の量子的粒子にも適用されうる．この側面について，さらにくわしいことは，現代的な素粒子論の本を参照されたい．

7.11 空間反転とパリティ

V を物理的空間を表す d 次元ユークリッドベクトル空間とし (典型的には $\mathbb{R}^3$), V 上の空間反転群を $\mathsf{G}_{\rm sp}=\{I_{\mathsf{V}},I_{\rm sp}\}$ とする (第2章，2.5節)．状態のヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上に $\mathsf{G}_{\rm sp}$ の表現 ϕ が実現しているとし

$$P_{\rm sp} := \phi(I_{\rm sp}) \tag{7.92}$$

は有界であり，$\pm I_{\mathscr{H}}$ でないとする．$P_{\rm sp}$ を**パリティ作用素**と呼ぶ．このとき，$\phi(I_{\rm sp})^2=\phi(I_{\rm sp}^2)=\phi(I_{\mathsf{V}})=I_{\mathscr{H}}$ であるから

$$P_{\rm sp}^2=I_{\mathscr{H}}. \tag{7.93}$$

例 7.51 $\mathsf{V}=\mathbb{R}^d$ とする．したがって，この場合，$I_{\rm sp}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d)$．$\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}^d)$ の場合を考え，表現 $\phi:\mathsf{G}_{\rm sp}\longrightarrow {\rm GL}(L^2(\mathbb{R}^d))$ を

$$\phi(I_{\mathbb{R}^d})=I,\quad (\phi(I_{\rm sp})\psi)(\boldsymbol{x}):=\psi(-\boldsymbol{x}),\quad \psi\in L^2(\mathbb{R}^d)$$

によって定義する．したがって，$(P_{\rm sp}\psi)(\boldsymbol{x})=\psi(-\boldsymbol{x})$．容易にわかるように，$P_{\rm sp}$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のユニタリ変換で自己共役である．

作用素 $P_{\rm sp}$ の固有値問題を解くために，次の一般的事実に注意する：

補題 7.52 A をヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ 上の有界線形作用素で $A\neq\pm I_{\mathscr{K}}, A^2=I_{\mathscr{K}}$ を満たすとする．このとき，A のスペクトル $\sigma(A)$ は固有値だけからなり，$\sigma(A)=\sigma_{\rm p}(A)=\{1,-1\}$*40.

証明 $\lambda\in\mathbb{C}$ を A の固有値とすれば，$A\Psi=\lambda\Psi$ を満たす $\Psi\neq 0$ がある．左から A を作用させると $\Psi=\lambda^2\Psi$ となるので，$\lambda^2=1$．したがって，$\lambda=\pm1$．ゆえに，$\sigma_{\rm p}(A)\subset\{-1,1\}$．他方，$A\neq -I_{\mathscr{K}}$ であるから，$\Phi:=(A+1)\Psi\neq 0$ となる $\Psi\in\mathscr{K}$ がある．このとき，$A\Phi=\Phi$．したがって，$1\in\sigma_{\rm p}(A)$．また，$A\neq I_{\mathscr{K}}$ であるから，

---

*40 $\sigma_{\rm p}(A)$ は A の点スペクトル，すなわち，A の固有値の全体を表す．

$\chi := (A-1)\eta \neq 0$ となる $\eta \in \mathscr{K}$ がある．このとき，$A\chi = -\chi$. したがって，$-1 \in \sigma_{\rm p}(A)$. よって，$\sigma_{\rm p}(A) = \{-1,1\}$. $z \neq \pm 1$ とすれば，$z \in \rho(A)$ (A のレゾルヴェント集合) ($\because$ $(A-z)\Psi = 0$ ならば，$(1-Az)\Psi = 0$. したがって，$z^2\Psi = \Psi$. ゆえに，$\Psi = 0$. よって，$A - z$ は単射．また，任意の $\Phi \in \mathscr{K}$ に対して，$\Psi = (A+z)\Phi/(1-z^2)$ とおけば，$(A-z)\Psi = \Phi$ がわかる．したがって，$A - z$ は全射．この場合，$\|(A-z)^{-1}\Phi\| = \|\Psi\| \leq (\|A\| + |z|)\|\Phi\|/|1-z^2|$ であるから，$(A-z)^{-1}$ は有界である)．以上から，題意がしたがう． ■

(7.93) と補題 7.52 によって

$$\sigma(P_{\rm sp}) = \sigma_{\rm p}(P_{\rm sp}) = \{-1,1\}. \tag{7.94}$$

$P_{\rm ps}$ の固有値 $+1$ (-1) に属する固有ベクトル，すなわち，$[\ker(P_{\rm sp}-1)] \setminus \{0\}$ $([\ker(P_{\rm sp}+1)] \setminus \{0\})$ の元によって表される状態を**正** (**負**) の**パリティ状態**と呼ぶ[*41].

考察下の系のハミルトニアンを H としよう．このとき，$P_{\rm sp}$ が保存量であれば (i.e., すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，$e^{-itH/\hbar}$ と $P_{\rm sp}$ は可換)，定理 7.35 によって，状態のパリティの正・負は，それぞれ，状態の時間発展において保存される．これを**パリティの保存則**という．

例 7.53 ハミルトニアンとして，例 7.3 のシュレーデンガー型作用素 H_V をとり，H_V は本質的に自己共役であるとする．さらに，V は空間反転対称，すなわち，$V(-\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d)$ が成り立つとする．このとき，すべての $s \in \mathbb{R}$ に対して，$e^{is\bar{H}_V}$ ($\bar{H}_V$ は H_V の閉包) と例 7.51 のパリティ作用素 $P_{\rm sp}$ は可換であることを証明することができる[*42]．したがって，この系では，状態の時間発展において，パリティは保存される．

注意 7.54 素粒子の間に存在する，いわゆる弱い相互作用に関わる現象においては (たとえば，中性子が陽子，電子，反ニュートリノに変化する β 崩壊)，パリティの保存則は成立しないことが実験的に確認されている．これは，弱い相互作用に関与する素粒子の中に，ニュートリノのように，空間反転に対して不変でないものが存在することによる．

[*41] 括弧には括弧を対応させて読む．

[*42] 数学的に厳密な証明は簡単ではないので (拙著『量子現象の数理』(朝倉書店，2006) の定理 4.44 を参照)，ここでは，$C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(V)$ として，任意の $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，$[H_V, P_{\rm ps}]f = 0$ を確認するだけでもよい．

7.12 量子力学的状態の置換対称性 — 量子的粒子の統計

古典力学の場合に，複数の質点からなる系，すなわち，多体系が存在するように，量子力学においても，複数の量子的粒子からなる系が存在する．このような量子系を**量子的多体系**と呼ぶ (量子力学の文脈では，単に多体系という場合が多い)．この節では，量子的多体系が有する基本的な対称性の 1 つをとりあげる．

7.12.1 状態の対称と反対称性

N を 2 以上の自然数とし，N 個の量子的粒子からなる系を考え，その状態のヒルベルト空間を $\mathscr{H}$ とする．この系における基本的な "操作" の 1 つとして，N 個の量子的粒子を入れ換える操作が考えられる．これは，数学的には，N 次の置換群 $\mathfrak{S}_N$ の元によって表される*43．この操作に伴って，状態空間上に 1 つの対称性変換が定まると仮定するのは自然である (7.4 節を参照)．そこで，各 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して，$\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素 P_σ が唯ひとつ定まるとする．さらに，対応 P: $\sigma \longmapsto P_\sigma$ は $\mathfrak{S}_N$ の表現であるとしよう：

$$P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}, \quad \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_N. \tag{7.95}$$

したがって，P は置換群 $\mathfrak{S}_N$ のユニタリ表現である．作用素 P_σ を σ に関する**置換作用素**と呼ぶ．

置換作用素の作用に応じて，$\mathscr{H}$ のベクトルを分類することができる：ベクトル $\Psi \in \mathscr{H}$ は，すべての $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して，$P_\sigma \Psi = \Psi$ を満たすとき，**対称** (symmetric) であるという．他方，すべての $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して，$P_\sigma \Psi = \mathrm{sgn}(\sigma)\Psi$ を満たすならば，Ψ は**反対称** (antisymmetric) であるという．ただし，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は置換 σ の符号を表す：σ が偶置換ならば $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$, 奇置換ならば $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$．こうして，$\mathscr{H}$ は，対称なベクトル全体の集合 — $\mathscr{H}_{\mathrm{sym}}$ と記す — と反対称なベクトル全体の集合 — $\mathscr{H}_{\mathrm{as}}$ と記す — および対称でも反対称でもないベクトル全体の集合の和集合として表される．

容易に確かめられるように，$\mathscr{H}_{\mathrm{sym}}$ と $\mathscr{H}_{\mathrm{as}}$ は，いずれも $\mathscr{H}$ の閉部分空間である (したがって，ヒルベルト空間)．さらに

$$\mathscr{H}_{\mathrm{sym}} \cap \mathscr{H}_{\mathrm{as}} = \{0\} \tag{7.96}$$

が成り立つ (問題 6)．

---

*43 置換群については，例 1.45 を参照．

上に定義した対称性，反対称性よりも弱い対称性，反対称性の概念を定義することができる．$\mathfrak{R}$ を $\mathfrak{S}_N$ の空でない部分集合としよう．$\mathfrak{R}$ の任意の元 σ に対して，$P_\sigma \Psi = \Psi$ $(\mathrm{sgn}(\sigma)\Psi)$ を満たすベクトル Ψ は $\mathfrak{R}$ 対称 (反対称) であるという[*44]．このようなベクトルを，総称的に，**部分的対称性 (部分的反対称性)** を持つベクトルという．

一般に，置換作用素の作用に対するベクトルの振る舞い方 (対称，反対称，部分的対称，部分的反対称) をそのベクトルによってあらされる状態の**統計性**と呼ぶ．

例 7.55 $\psi \in L^2((\mathbb{R}^3)^N)$ に対して

$$(P_\sigma \psi)(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) := \psi(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{\sigma(N)}), \quad (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) \in (\mathbb{R}^3)^N \tag{7.97}$$

とすれば，$\{P_\sigma | \sigma \in \mathfrak{S}_N\}$ は置換群 $\mathfrak{S}_N$ の $L^2((\mathbb{R}^3)^N)$ 上でのユニタリ表現である (問題 7)．したがって，この場合，対称な状態ベクトルは

$$\psi(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{\sigma(N)}) = \psi(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N), \quad (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) \in (\mathbb{R}^3)^N, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_N$$

を満たす関数 ψ で表される．この型の関数を**対称な状態関数**という．他方，反対称な状態ベクトルは

$$\psi(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{\sigma(N)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\psi(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N), \quad (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) \in (\mathbb{R}^3)^N, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_N$$

を満たす関数 ψ で表される．この型の関数を**反対称な状態関数**という．

$N=2$ の場合を考えよう．任意の $f, g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ に対して

$$\psi_\pm(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) := \frac{f(\boldsymbol{x}_1)g(\boldsymbol{x}_2) \pm f(\boldsymbol{x}_2)g(\boldsymbol{x}_1)}{2}$$

とおけば，ψ_+ は対称であり，ψ_- は反対称である．また，$\psi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) := e^{-\boldsymbol{x}_1^2 - \boldsymbol{x}_2^4}$ によって定義される関数 ψ は対称でも反対称でもない．

7.12.2 同種の量子的粒子の多体系の状態

量子的多体系のうちで，もっとも基本となるのは，同種の量子的粒子からなる系である．たとえば，N 個の電子からなる系はそのような系の例である $(N \geq 2)$．そこで，N 個の同種の量子的粒子からなる系を考え，その状態のヒルベルト空間を $\mathscr{K}$ とする．前項と同様，$\mathscr{K}$ 上に N 次の置換群 $\mathfrak{S}_N$ の表現 $\{P_\sigma | \sigma \in \mathfrak{S}_N\}$ が実現しているとする．

ところで，同種の量子的粒子は原理的に区別できないという重要な性質を持つ．

[*44] 括弧には括弧を対応させて読む．

これは**不可弁別性の原理**と呼ばれ，量子的粒子が古典力学的な対象と本質的に異なる性質の1つを表す．この原理は，任意のベクトル $\Psi \in \mathscr{K}\setminus\{0\}$ によって表される状態と $P_\sigma\Psi$ ($\sigma\in\mathfrak{S}_N$ は任意) によって表される状態は同じであることを意味する (同種の量子的粒子の任意の入れ換えによって状態は変化しないということ)．すると，量子力学的状態の相等原理 (第7章，7.2.1項，公理 (QM.1)) によって，定数 $C(\sigma)\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ があって

$$P_\sigma\Psi = C(\sigma)\Psi$$

が成り立つ ($C(\sigma)$ は Ψ にも依存しうる)．(7.95) を用いると

$$C(\sigma)C(\tau)=C(\sigma\tau), \quad \sigma,\tau\in\mathfrak{S}_N$$

が成り立つことがわかる (ここで，$\Psi\neq 0$ がきく)．容易にわかるように，この方程式の解 $C:\mathfrak{S}_N\longrightarrow\mathbb{C}\setminus\{0\}$ として，次の2つがある：(i) $C(\sigma)=1$ ($\forall\sigma\in\mathfrak{S}_N$), (ii) $C(\sigma)=\mathrm{sgn}(\sigma)$ ($\forall\sigma\in\mathfrak{S}_N$)．ただし，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は置換 σ の符号である (σ が偶置換ならば $+1$, 奇置換ならば -1)．さらに，これらの他には解がないこともわかる[*45]．したがって，結果的に，$C(\cdot)$ は Ψ によらないこともわかる．こうして，同種の量子的粒子からなる多体系の任意の状態ベクトルは，対称であるか反対称のいずれかであることがわかる．さらに，次の強い事実が成り立つ：

定理 7.56 $\mathscr{K}=\mathscr{K}_{\mathrm{sym}}$ または $\mathscr{K}=\mathscr{K}_{\mathrm{as}}$ のいずれかが成り立つ．

証明 まず，$\mathscr{K}_{\mathrm{sym}}\neq\{0\}$ の場合を考える．仮にあるベクトル $\Phi\in\mathscr{K}\setminus\{0\}$ があって，$\Phi\notin\mathscr{K}_{\mathrm{sym}}$ とすると，上の事実から，Φ は反対称である．したがって，任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_N$ に対して，$P_\sigma\Phi=\mathrm{sgn}(\sigma)\Phi$．いま，$\mathscr{K}_{\mathrm{sym}}\neq\{0\}$ であるから，$P_\sigma\Psi=\Psi$ ($\forall\sigma\in\mathfrak{S}_N$) を満たす $\Psi\neq 0$ が存在する．したがって，$P_\sigma(\Phi-\Psi)=\mathrm{sgn}(\sigma)\Phi-\Psi$. $\Phi\neq\Psi$ であるから，再び，上記の事実により，$P_\sigma(\Phi-\Psi)=\Phi-\Psi\cdots(*)$ または $P_\sigma(\Phi-\Psi)=\mathrm{sgn}(\sigma)(\Phi-\Psi)\cdots(**)$. $(*)$ の場合，$\Phi-\Psi=\mathrm{sgn}(\sigma)\Phi-\Psi$．したがって，$\Phi=\mathrm{sgn}(\sigma)\Phi$．そこで，$\sigma$ として奇置換をとれば，$\Phi=0$ が導かれる．だが，これは矛盾である．$(**)$ の場合は，$\mathrm{sgn}(\sigma)\Psi=\Psi$ が成り立つので，同様に，$\Psi=0$ が結論され，やはり，矛盾に行き着く．したがって，$\mathscr{K}\subset\mathscr{K}_{\mathrm{sym}}$．ゆえに $\mathscr{K}=\mathscr{K}_{\mathrm{sym}}$．

前段とまったく並行的な議論により，もし，$\mathscr{K}_{\mathrm{as}}\neq\{0\}$ ならば $\mathscr{K}=\mathscr{K}_{\mathrm{as}}$ が導かれる． ■

[*45] この点については，新井朝雄・江沢 洋『量子力学の数学的構造 II』(朝倉書店，1999) の補題 4.9 を参照．

この定理は，同種の量子的粒子からなる多体系の状態は，すべて対称であるか，すべて反対称であるかのいずれかであることを語る．

第 7 章の演習問題

1. $\Psi' \in [\Psi], \Phi' \in [\Phi]$ ならば，$|\langle \hat{\Phi}', \hat{\Psi}' \rangle|^2 = |\langle \hat{\Phi}, \hat{\Psi} \rangle|^2$ を示せ．

2. 命題 7.10 を証明せよ．

3. (7.23)～(7.24) を満たす $X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n, Z$ (ただし，$Z \neq 0$ とする) は線形独立であることを示せ．

注 リー括弧積に対する関係式だけから，線形独立性が導かれるのは興味深く，美しい．

4. A を n 次の複素正方行列で $A^2 = I_n$ (n 次の単位行列) を満たすものとする．このとき，任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$e^{zA} = (\cosh z) I_n + (\sinh z) A$$

を示せ．ただし，$\cosh z, \sinh z$ はそれぞれ，双曲線余弦関数，双曲線正弦関数である[*46]．

5. $\mathscr{H}$ を複素ヒルベルト空間とし，$\mathscr{D}$ を $\mathscr{H}$ の部分空間とする．$\mathscr{D}$ は線形作用素 A_1, A_2, A_3 の不変部分空間であり (i.e.，$\mathscr{D} \subset D(A_j), A_j \mathscr{D} \subset \mathscr{D}$)，$A_j$ は $\mathscr{D}$ 上の写像として零でないとする．さらに，A_1, A_2, A_3 は $\mathscr{D}$ 上で次の交換関係を満たすとする：

$$[A_1, A_2] = \mu_3 A_3, \quad [A_2, A_3] = \mu_1 A_1, \quad [A_3, A_1] = \mu_2 A_2.$$

ただし，μ_j ($j = 1, 2, 3$) は 0 でない複素数である．このとき，A_1, A_2, A_3 はベクトル空間 $\mathsf{L}(\mathscr{D})$ ($\mathscr{D}$ 上の線形作用素の全体) の元として，線形独立であることを示せ．

注 問題 3 の場合と同様に，交換関係だけから作用素の線形独立性が導かれるという構造は単純で美しい．

6. (7.96) を証明せよ．

7. (7.97) によって定義される写像 P_σ は，ユニタリ作用素であり，$P_\tau P_\sigma = P_{\tau\sigma}$ ($\tau, \sigma \in \mathfrak{S}_N$) を満たすことを示せ．

[*46] $\cosh z := \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}, \sinh z := \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$.

8. 任意の $\psi \in L^2((\mathbb{R}^3)^N)$ に対して

$$\psi_+(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \psi(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{\sigma(N)})$$

は対称な状態関数であり

$$\psi_-(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \psi(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{\sigma(N)})$$

は反対称な状態関数であることを示せ.

第8章

超対称性

8.1 超対称性の物理的描像

第7章，7.9節で見たように，量子的粒子はスピン角運動量と呼ばれる固有の物理量を担っている．しかも，各量子的粒子のスピンの大きさは，非負整数か半奇数のいずれかである．この事実に基づいて，量子的粒子を2つの族に分けることができる．スピンの大きさが非負整数の量子的粒子を**ボソン**または**ボース粒子**，半奇数の量子的粒子を**フェルミオン**または**フェルミ粒子**と呼ぶ．たとえば，電子，核子はスピン1/2の量子的粒子のなので，フェルミオンであり，スピンが0のπ中間子やスピンが1の光子はボソンである．

ボソンとフェルミオンは根本的に異なる性質を持つ．これは，たとえば，量子的粒子の置換に関する振る舞い方の違いとして現れる．具体的にいえば，同種のボソンからなる多体系の状態は，ボソンの任意の入れ換え (置換) に対して，不変 (対称) であるが，同種のフェルミオンからなる多体系の状態は，フェルミオンの任意の置換に対して，反対称，すなわち，フェルミオンの置換が偶置換ならば不変であり，奇置換ならばマイナスの符号がつく (多体系の状態の対称性，反対称性については，7.12節を参照)．この性質を**スピンと統計の関係**と呼ぶ．

このように，ボソンとフェルミオンの特徴は著しく異なるのであるが，ちょうど，陽子と中性子を核子という1つの対象の2つの異なる状態として捉える見方 (アイソスピンの観点) がある意味で自然であるように，ボソンとフェルミオンを1つの対象の異なる状態として捉える観点へと移行することは可能である．つまり，ボソンとフェルミオンの組を1つの対象として捉え，ボソンとフェルミオンを同等に扱う対称性を考えるのである．この対称性が**超対称性** (supersymmetry)

である．

超対称性は，歴史的には，相対論的な量子場の理論 (特殊相対論的な古典場の理論の量子版) の文脈で考案されたものである．超対称性の本来の理念は，前段の叙述が示唆するように，素粒子の統計性に関して，より高次のレヴェルでの統一を目指すものであり，ボソンとフェルミオンがその "分節" として現れてくるような，より "上位" の実体を探求するためのものである．だが，やがて，超対称性の考え方自体は，普遍的なものであることが知られるようになり，相対論的な量子場の理論だけでなく，非相対論的な量子場の理論や有限自由度の量子力学にも適用され，非常に多くの研究成果が得られている．この章では，それらを抽象的な水準で包括する数学理論としての超対称的量子力学の導入的部分を論述する*[1]．

8.2 ボソンとフェルミオンからなる系の状態のヒルベルト空間と超対称性の生成子

超対称的量子力学を抽象的に定式化する前段階の 1 つとして，ボソンとフェルミオンからなる量子系のの状態のヒルベルト空間の一般的構造を調べておく．まず，発見法的な議論からはじめる．ボソンとフェルミオンからなる量子系を考え，その状態のヒルベルト空間を $\mathscr{H}$ とする．この系の状態の中には，ボソン的な状態とフェルミオン的な状態があると想定される*[2]．そこで，ボゾン的な状態ベクトルから生成される閉部分空間を $\mathscr{H}_+$, フェルミオン的な状態ベクトルから生成される閉部分空間を $\mathscr{H}_-$ をとする．物理的には，ボソン的 (フェルミオン的) な状態においてフェルミオン的 (ボソン的) な状態を見出す確率は 0 であるべきであるか

*[1]超対称性の物理的側面に関するさらにくわしい内容については，物理の本を参照されたい (たとえば，大田信義・坂井典佑『超対称性理論』，サイエンス社，2006)．しかし，以下の叙述を理解するだけであるならば，いまただちに参照する必要はない．本章を読み終えた後で，超対称的量子力学の数学理論全般を学ぶための文献として，拙著『量子現象の数理』(朝倉書店，2006) の第 9 章をあげておく．

*[2]偶数個のフェルミオンからなる系のスピンは，半奇数のスピンの偶数個の和であるので (スピンの合成則)，整数である．したがって，偶数個のフェルミオンからなる状態は — その構成要素の各々はボソンではないが — ボソン的である．したがって，任意の個数のボソンと偶数個のフェルミオンからなる状態はボソン的な状態である．他方，任意の個数のボソンと奇数個のフェルミオンからなる状態はフェルミオン的状態である．

ら[*3]，$\mathscr{H}_+$ と $\mathscr{H}_-$ は直交すると仮定するのは自然である：$\mathscr{H}_+ \perp \mathscr{H}_-$．さらに，任意の状態ベクトルは，ボソン的な状態ベクトルとフェルミオン的な状態ベクトルの和で表されるとするのも自然であろう．したがって

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_+ \oplus \mathscr{H}_- \tag{8.1}$$

と直交分解できることになる．

前節で述べたように，超対称性は，ボソンとフェルミオンを対等に扱う対称性であるから，ボソン的状態をフェルミオン的状態に写し，フェルミオン的状態をボソン的状態に写す自己共役作用素を考えるのは自然であり，そのような作用素は，状態の変換に関する超対称性を表すものと予想される．そこで，次の定義を設ける：$\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素 Q が次の 2 つの性質を持つとき (Q の定義域を $D(Q)$ で表す)，Q を**超対称性の生成子**または**超対称荷** (supersymmetry charge) と呼ぶ[*4]

(Q.1) $D(Q)\cap\mathscr{H}_+$ のベクトルを $\mathscr{H}_-$ に写し，$D(Q)\cap\mathscr{H}_-$ のベクトルを $\mathscr{H}_+$ に写す．

(Q.2) $D(Q) = (D(Q)\cap\mathscr{H}_+)\oplus(D(Q)\cap\mathscr{H}_-)$.

性質 (Q.1) は，超対称性について，すぐ上で述べたことの数学的に正確な表現である．(8.1) によって，任意の $\Psi \in D(Q)$ は $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$ ($\Psi_\pm \in \mathscr{H}_\pm$) と一意的に分解されるが，一般には，$\Psi_\pm \in D(Q)$ とは限らないことに注意しよう．性質 (Q.2) は，任意の $\Psi \in D(Q)$ に対して，つねに $\Psi_\pm \in D(Q)$ を保証する条件である．これは，物理的には，$D(Q)$ が $D(Q)$ に属するボソン的状態とフェルミオン的状態で尽くされることを表すものであり，自然な条件といえる．

超対称荷を代数的に特徴づけるために，$\mathscr{H}_\pm$ 上への正射影作用素を $P_\pm$ とし，$\mathscr{H}$ 上の有界な自己共役作用素 Γ を

$$\Gamma := P_+ - P_- \tag{8.2}$$

によって導入する．容易にわかるように

$$\Gamma\Psi = \Psi \ (\Psi \in \mathscr{H}_+), \quad \Gamma\Phi = -\Phi \ (\Phi \in \mathscr{H}_-). \tag{8.3}$$

すなわち，$\mathscr{H}_+$ は Γ の固有値 1 に属する固有空間であり，$\mathscr{H}_-$ は Γ の固有値 -1 に属する固有空間である．したがって，特に

---

*3 括弧には括弧を対応させて読む．

*4 超対称性電荷あるいは超対称性的電荷と訳す場合もある．

$$\Gamma^2 = I \tag{8.4}$$

が成り立つ (I は $\mathscr{H}$ 上の恒等作用素). これは，正射影作用素の冪等性 $P_\pm^2 = P_\pm$ と (8.1) からしたがう性質

$$P_+ + P_- = I, \quad P_+P_- = 0 \tag{8.5}$$

を用いても証明できる. (8.3) が示すように，Γ は，状態がボソン的かフェルミオン的かをその作用の符合に応じて識別する作用素である. そこで，Γ を**状態符号作用素**と呼ぶ*5.

命題 8.1 Q を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする. Q が超対称荷であるための必要十分条件は，任意の $\Psi \in D(Q)$ に対して，$\Gamma\Psi \in D(Q)$ でありかつ

$$(\Gamma Q + Q\Gamma)\Psi = 0 \tag{8.6}$$

が成り立つことである.

証明 (必要性) Q は超対称荷であるとする. このとき，任意の $\Psi \in D(Q)$ に対して，(Q.2) により $\Psi_\pm = P_\pm\Psi \in D(Q) \cap \mathscr{H}_\pm$. これと $\Gamma\Psi = \Psi_+ - \Psi_-$ により $\Gamma\Psi \in D(Q)$ であり，$Q\Gamma\Psi = Q\Psi_+ - Q\Psi_-$ となる. 他方，$Q\Psi = Q\Psi_+ + Q\Psi_-$. (Q.1) により $Q\Psi_\pm \in \mathscr{H}_\mp$ であるから，$\Gamma Q\Psi_\pm = \mp Q\Psi_\pm$. したがって，$\Gamma Q\Psi = -Q\Psi_+ + Q\Psi_-$. ゆえに (8.6) がしたがう.

(十分性) 任意の $\Psi \in D(Q)$ に対して $\Gamma\Psi \in D(Q)$ であり，(8.6) が成り立つとする. $\Psi \in D(Q) \cap \mathscr{H}_+$ とすれば，(8.6) と $\Gamma\Psi = \Psi$ によって $\Gamma Q\Psi = -Q\Gamma\Psi = -Q\Psi$. したがって $Q\Psi \in \mathscr{H}_-$. 同様にして，$\Psi \in D(Q) \cap \mathscr{H}_-$ ならば $Q\Psi \in \mathscr{H}_+$ が示される. したがって，(Q.1) が成立する. (8.2) と (8.5) によって，$P_\pm$ は Γ を用いて

$$P_+ = \frac{1+\Gamma}{2}, \quad P_- = \frac{1-\Gamma}{2} \tag{8.7}$$

と表される. したがって，任意の $\Psi \in D(Q)$ に対して $\Psi_\pm := P_\pm\Psi = (1/2)(\Psi \pm \Gamma\Psi) \in D(Q)$ であり，$\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$ と書けるので (Q.2) が成立する. ■

一般に，ヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ 上の線形作用素 A と有界線形作用素 B ($D(B) = \mathscr{K}$) について，任意の $\Psi \in D(A)$ に対して，$B\Psi \in D(A)$ であって

$$(AB + BA)\Psi = 0 \tag{8.8}$$

---

*5 物理の文献では，フェルミオン個数作用素と呼ぶ場合がある.

が成り立つとき，A は B と**強反可換**であるという[*6].

いま定義した概念を用いると，命題8.1は次のようにいいかえられる：$\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素 Q が超対称荷であるための必要十分条件は，Q が状態符号作用素 Γ と強反可換であることである.

8.3 超対称的量子力学の抽象的定式化

超対称的量子力学は，ハミルトニアンが超対称性変換に関して対称性を持つ量子力学として定式化される.

定義 8.2 $\mathscr{H}$ をヒルベルト空間とし，直交する閉部分空間 $\mathscr{H}_\pm$ が存在して，(8.1) が成り立つとする．$Q_1,\cdots,Q_N$ $(N\geq 1)$ を $\mathscr{H}$ 上の超対称荷とし，H を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする．次の性質 (S.1), (S.2) が成り立つとき，4つ組 $\{\mathscr{H},H,\{Q_n\}_{n=1}^N,\Gamma\}$ を N **超対称性を持つ超対称的量子力学**と呼ぶ：

(S.1) $H=Q_n^2$ $(n=1,2,\cdots,N)$ (H は n によらない).

(S.2) $\langle Q_j\Psi,Q_k\Phi\rangle+\langle Q_k\Psi,Q_j\Phi\rangle=0$ $(\Psi,\Phi\in D(Q_j)\cap D(Q_k)$ $(j\neq k,j,k=1,\cdots,N))$.

この場合，H を**超対称的ハミルトニアン**という.

この定義について若干のコメントをしておこう．まず，超対称荷の個数を1個としなかったのは，この方が一般性があるからである．前章で述べたように，量子系の対称性を記述する作用素は，ハミルトニアンと可換であることが必要である．したがって，超対称性を持つ系のハミルトニアンは各超対称荷 Q_n と可換でなければならない．ところで，Q_n と可換で非自明な自己共役作用素のうちもっとも単純なものは Q_n^2 であろう．これが，(S.1) へと到る1つの発見法的な道である．性質 (S.2) は，相異なる超対称荷は弱い意味で反可換になることを表すものである．じつは，(S.1), (S.2) は，古典物理学的レヴェルでの超対称性を考察し，表現論的な観点へ移行することにより，ある意味で自然に定式化される．だが，この点についての叙述は，ここでは割愛する[*7].

[*6]「強」という語がついているのは，通常の反可換性：$(AB+BA)\Psi=0,\Psi\in D(AB)\cap D(BA)$ (定義域に注意) よりも強い反可換性の概念だからである (反可換でも強反可換とは限らない)．もちろん，A が $\mathscr{K}$ 全体を定義域とする有界作用素ならば，強反可換性は通常の反可換性と同じである.

[*7]拙著『量子現象の数理』(朝倉書店，2006) の第9章，9.1節，9.2節を参照.

ここで定義された超対称的量子力学の理念は，上の議論から見てとれるように，超対称性という対称性だけを取り入れて導かれるものである．したがってそれは，超対称的な量子力学の種々の範疇 — 超対称的な相対論的量子場の理論，超対称的な非相対論的量子場の理論，超対称的な有限自由度の量子力学など — をもっとも抽象的な水準において統一的に包括するものである．超対称性を持つ量子力学の範疇の個々の違いは，超対称性以外の対称性としてどのような対称性が関与しているかの違いとして把握される．たとえば，超対称的な相対論的量子場の理論は，超対称性にポアンカレ変換群の対称性が加わってできるものであり，超対称的な非相対論的量子場の理論には，超対称性にガリレイ群またはそのいくつかの部分群の対称性が関わる．

例 8.3 ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$ の直和

$$L^2(\mathbb{R})\oplus L^2(\mathbb{R})=\left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \middle| \, f,g\in L^2(\mathbb{R})\right\}$$

を考える．$M=(M_{jk})$ を 2 次の正方行列，A を $L^2(\mathbb{R})$ 上の線形作用素とするとき，$L^2(\mathbb{R})\oplus L^2(\mathbb{R})$ 上の線形作用素 MA を次のように定義する：

$$D(MA):=D(A)\oplus D(A),$$

$$MA\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}:=M\begin{pmatrix} Af \\ Ag \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M_{11}Af+M_{12}Ag \\ M_{21}Af+M_{22}Ag \end{pmatrix}.$$

W を $\mathbb{R}$ 上の 2 回連続微分な実数値関数とし，$L^2(\mathbb{R})\oplus L^2(\mathbb{R})$ の線形作用素 Q を

$$Q:=\sigma_1 p+\sigma_2 W'$$

によって定義する．ただし，$p:=-i\hbar d/dx, \sigma_1, \sigma_2$ はパウリ行列であり (例 7.36 を参照)，W' は W の導関数である．また

$$\Gamma:=\sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を導入する．容易にわかるように

$$\Gamma^2=I, \quad (\Gamma Q+Q\Gamma)\psi=0, \quad \psi\in D(Q).$$

ハミルトニアンを

$$H:=p^2+\hbar\sigma_3 W''+(W')^2$$

によって定義する．このとき

$$H\psi=Q^2\psi, \quad \psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})\oplus C_0^\infty(\mathbb{R})$$

を示すの難しくない ($(pW')\psi = -i\hbar W''\psi + W'(p\psi)$ と $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$ に注意).

作用素 Q が対称作用素であることは容易にわかる．だが，それが本質的に自己共役か否かは自明ではなく，W の性質に依存する．この問題をくわしく論じるにはそれ相応の数学的準備が必要なので，ここでは，Q は $C_0^\infty(\mathbb{R})\oplus C_0^\infty(\mathbb{R})$ 上で本質的に自己共役であると仮定して話を進める．したがって，Q の閉包 $\bar{Q}$ は自己共役である*8．H も本質的に自己共役であると仮定する．このとき

$$\bar{H} = \bar{Q}^2 \tag{8.9}$$

が成り立つことが証明される (問題 1)．さらに，$\bar{Q}$ は Γ と強可換であること，すなわち，任意の $\psi \in D(\bar{Q})$ に対して $\Gamma\psi \in D(\bar{Q})$ であり

$$(\Gamma\bar{Q} + \bar{Q}\Gamma)\psi = 0 \tag{8.10}$$

が成り立つことも示される (問題 2)．以上によって，$(L^2(\mathbb{R})\oplus L^2(\mathbb{R}), \bar{H}, \bar{Q}, \Gamma)$ は超対称的量子力学の具現の 1 つであることがわかる．この具現は，通常**ウィッテン模型**と呼ばれている．この場合，W を**超ポテンシャル**という*9．

8.4 超対称的量子力学の特徴

$\{\mathscr{H}, H, \{Q_n\}_{n=1}^N, \Gamma\}$ を N 超対称性を持つ超対称的量子力学とする．

8.4.1 ハミルトニアンの非負性

超対称的量子力学の特徴の 1 つは，そのハミルトニアンが非負であるということである．実際，任意の $\Psi \in D(H) = D(Q_n^2)$ に対して

$$\langle \Psi, H\Psi \rangle = \langle Q_n\Psi, Q_n\Psi \rangle \geq 0.$$

したがって，H のスペクトル $\sigma(H)$ は $[0,\infty)$ に含まれる*10．ゆえに

$$E_0 := \inf \sigma(H) \geq 0. \tag{8.11}$$

ここで，$\inf \sigma(H)$ は $\sigma(H)$ の下限を表す．

E_0 が H の固有値であるとき，その固有ベクトル，すなわち $(\ker(H - E_0)) \setminus \{0\}$

---

*8 この $\bar{Q}$ におけるバー「$\bar{\ }$」は，物理の文献に出てくるそれとは意味が異なるから注意されたい．

*9 ウィッテン模型の数学的に厳密な解析については，拙著『量子現象の数理』(朝倉書店，2006) の 9.5 節を参照．

*10 付録 F，定理 F.12 の応用．

の元を H の**基底状態** (ground state) と呼ぶ[*11]. この場合,「H は基底状態持つ」という言い方をする.

$E_0=0$ が H の固有値であるならば，その固有ベクトルを H の**零エネルギー状態**と呼ぶ[*12].

8.4.2 超対称荷のスペクトルの鏡映対称性

超対称荷のスペクトルに関する次の性質はたいへん興味深い：

命題 8.4 各 Q_n のスペクトル $\sigma(Q_n)$ は $\mathbb{R}$ の原点に関して鏡映対称である．すなわち，$\lambda\in\sigma(Q_n)$ ならば $-\lambda\in\sigma(Q_n)$.

証明 Q_n は Γ と強可換であるから，作用素の等式 $\Gamma Q_n\Gamma^{-1}=-Q_n$ が成り立つ．一方，Γ はユニタリ作用素である．したがって，$\sigma(Q_n)=\sigma(-Q_n)$ ($\because$ 線形作用素のスペクトルは，ユニタリ変換のもとで不変[*13])．一般に，ヒルベルト空間上の任意の線形作用素 A に対して $\sigma(-A)=\{-\lambda|\lambda\in\sigma(A)\}$ を示すのは難しくない (問題3)．したがって，題意がしたがう． ■

8.4.3 超対称的ハミルトニアンのスペクトルの構造

補題 8.5 任意の $\Psi\in D(H)$ に対して，$P_\pm\Psi\in D(H)$ かつ

$$HP_\pm\Psi=P_\pm H\Psi \tag{8.12}$$

が成り立つ.

証明 $Q=Q_n$ とおく．$\Psi\in D(Q^2)$ であるから，$\Psi\in D(Q)$ かつ $Q\Psi\in D(Q)\cdots(*)$．したがって，命題 8.1 によって，$\Gamma\Psi\in D(Q)$ かつ $\Gamma Q\Psi=-Q\Gamma\Psi$ が成り立つ．$(*)$ と命題 8.1 により，左辺は $D(Q)$ に属し，$Q\Gamma Q\Psi=-\Gamma Q^2\Psi=-\Gamma H\Psi$．したがって $\Gamma\Psi\in D(Q^2)=D(H)$ であって，$-\Gamma H\Psi=-Q^2\Gamma\Psi$．すなわち

$$H\Gamma\Psi=\Gamma H\Psi,\quad \Psi\in D(H) \tag{8.13}$$

が成り立つ．これらの事実と (8.7) により，題意が成立することがわかる． ■

[*11] この概念は，超対称的ハミルトニアンに限定されたものではなく，下に有界な自己共役作用素一般に適用されるものである．なお，H が具象的な形で与えられる場合，その基底状態が存在するか否かは (もちろん，H の形に依存するが) 決して自明な問題ではなく，量子力学の数学的理論における重要な問題の 1 つを提供する.

[*12] 前脚注と関連するが，零エネルギー状態が存在するか否も非自明な問題である.

[*13] 拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) の定理 2.23 を参照.

補題 8.5 によって，$\mathscr{H}_\pm$ 上の線形作用素 $H_\pm$ を次のように定義できる：

$$D(H_\pm) := D(H) \cap \mathscr{H}_\pm, \quad H_\pm \Psi := H\Psi, \quad \Psi \in D(H_\pm). \tag{8.14}$$

このとき，補題 8.5 によって

$$H = H_+ \oplus H_- \tag{8.15}$$

と書けることがわかる．ただし

$$(H_+ \oplus H_-)\Psi := H_+ P_+ \Psi + H_- P_- \Psi, \quad \Psi \in D(H). \tag{8.16}$$

作用素 H_+ を H のボソン的部分，H_- を H のフェルミオン的部分と呼ぶ．詳細は割愛するが，$H_\pm$ は非負の自己共役作用素であることを証明することができる．次の事実に注意しよう：

補題 8.6　任意の $E \geq 0$ に対して，$\ker(H-E) = \ker(H_+ - E) \oplus \ker(H_- - E)$．したがって，特に

$$\dim\ker(H-E) = \dim\ker(H_+ - E) + \dim\ker(H_- - E). \tag{8.17}$$

証明　$\ker(H_+ - E) \oplus \ker(H_- - E) \subset \ker(H-E)$ は明らかであろう．逆の包含関係を示すために $\Psi \in \ker(H-E)$ としよう．したがって，$H\Psi = E\Psi$．これは，$\Psi_\pm = P_\pm \Psi$ とおけば $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$ であり，$H_+\Psi_+ + H_-\Psi_- = E\Psi_+ + E\Psi_-$ を意味する．したがって $(H_+ - E)\Psi_+ = -(H_- - E)\Psi_-$．左辺は $\mathscr{H}_+$ に属し右辺は $\mathscr{H}_-$ に属するから，それらはいずれも 0 でなければならない：$(H_+ - E)\Psi_+ = 0$, $(H_- - E)\Psi_- = 0$．したがって，$\Psi_+ \in \ker(H_+ - E), \Psi_- \in \ker(H_- - E)$．ゆえに $\Psi \in \ker(H_+ - E) \oplus \ker(H_- - E)$．　■

次の定理は，超対称的ハミルトニアンの顕著な性質の 1 つを示す：

定理 8.7　$E > 0$ が H_+ の固有値ならば，E は H_- の固有値であり，この逆も成り立つ．この場合，もし E の多重度が有限ならば，作用素

$$U_E := \frac{Q_n}{\sqrt{E}} \tag{8.18}$$

は $\ker(H_+ - E)$ から $\ker(H_- - E)$ へのユニタリ変換である．したがって，特に，$\dim\ker(H_+ - E) = \dim\ker(H_- - E)$ (H_+ の固有値としての E の多重度と H_- の固有値としての多重度は等しい)．

証明　$H_+\Psi_E := E\Psi_E$ としよう ($\Psi_E \in D(H_+)\setminus\{0\}$)．したがって，$\Phi_E := Q_n\Psi_E$ とおけば $\Phi_E \in D(Q_n) \cap \mathscr{H}_-$ であり，$Q_n\Phi_E = E\Psi_E \cdots (*)$．右辺は $D(H_+)$ に入って

いるので，両辺に Q_n を作用させることができ，$H_-\Phi_E = E\Phi_E$ となる．もし $\Phi_E = 0$ ならば，(*) によって $E\Psi_E = 0$. しかし $E > 0$ であるから，$\Psi_E = 0$ となって矛盾が生じる．したがって $\Phi_E \neq 0$. ゆえに，E は H_- の固有値であり，Φ_E はその固有ベクトルの 1 つである．いまの議論は，H_+ と H_- の役割を代えても，まったく同様に成立するので，定理の第一の言明が証明されたことになる．

$k = \dim\ker(H_+ - E) < \infty$ とする．この場合，$\ker(H_+ - E)$ の中に k 個のベクトルからなる正規直交基底 $\Psi_1, \cdots, \Psi_k$ がとれる．このとき，任意の $j, l = 1, \cdots, k$ に対して，$\langle U_E\Psi_j, U_E\Psi_l\rangle = E^{-1}\langle \Psi_j, Q_n^2\Psi_l\rangle = E^{-1}\langle \Psi_j, E\Psi_l\rangle = \delta_{jl}$ であるので，$\{U_E\Psi_j\}_{j=1}^k$ は $\ker(H_- - E)$ の正規直交系である．だが，定理の第一の言明によって，これは $\ker(H_- - E)$ の正規直交基底でなければならない．ゆえに $\dim\ker(H_+ - E) = \dim\ker(H_- - E)$ であって，U_E は $\ker(H_+ - E)$ から $\ker(H_- - E)$ へのユニタリ変換である． ■

補題 8.6 と定理 8.7 を合わせると次の興味深い事実が見出される：

系 8.8 H が多重度有限の正の固有値を持つならば，その多重度は偶数である．

証明 E を H の正の固有値で多重度が有限のものとすれば，補題 8.6 と定理 8.7 によって，$\dim\ker(H - E) = 2\dim\ker(H_+ - E)$. これは偶数である． ■

8.4.4 超対称的状態と超対称性の自発的破れ

7.7 節で見たように，時間並進や空間並進あるいは空間回転に関して対称な状態ベクトルは，それを定義する群の生成子によって消される状態ベクトル (生成子の作用によって零ベクトルにもたらされる状態ベクトル) として特徴づけられた．これに倣って，超対称的な状態を次のように定義する：$Q_n\Psi = 0$ $(n = 1, \cdots, N)$ となる零でない状態ベクトル $\Psi \in \bigcap_{n=1}^N D(Q_n)$ (すなわち，$\left(\bigcap_{n=1}^N \ker Q_n\right) \setminus \{0\}$ の元) によって表される状態を**超対称的状態**という．

命題 8.9 ベクトル $\Psi \in \bigcap_{n=1}^N D(Q_n)$ が超対称的状態であるための必要十分条件は，それが零エネルギー状態であることである．

証明 (必要性) $Q_n\Psi = 0$ ならば $Q_n^2\Psi = 0$. したがって $H\Psi = 0$. ゆえに Ψ は零エネルギー状態である．

(十分性) $\Psi \in D(H)$ が零エネルギー状態ならば，$H\Psi = 0$ であるから，$\langle \Psi, H\Psi\rangle = 0$. 一方，$H = Q_n^2$ により左辺は $\|Q_n\Psi\|^2$ に等しい．したがって，$\|Q_n\Psi\| = 0$ $(n =$

$1,\cdots,N)$. ゆえに $Q_n\Psi=0$ $(n=1,\cdots,N)$. ■

超対称的状態が存在しないとき (したがって，命題 8.9 によって $\ker H=\{0\}$ のとき)，**超対称性は自発的に破れている**という．

注意 8.10 超対称的な相対論的量子場の理論において超対称性が破れていないときは，ボソン，フェルミオンの 1 粒子状態は，静止系において，それぞれ H_+, H_- の最小の正の固有値の固有状態によって表される．その場合，固有値は質量を表すので，定理 8.7 によってボソンとフェルミオンの質量は等しいことが結論される．他方，これまで，フェルミオン (たとえば，電子) と同じ質量を持つボソンは見つかっていない．したがって，もし，素粒子が超対称的な相対論的量子場の模型によって記述されるとすれば，それは，超対称性が破れている模型でなければならないことが示唆される．これは，超対称的な相対論的量子場の模型の構築における重要な点の 1 つである．

例 8.11 ウィッテン模型における超対称性の自発的破れは，超ポテンシャル W の無限遠での振る舞いに依存する．たとえば $\int_{\mathbb{R}} e^{\pm 2W(x)}\,dx=+\infty$ ならば，超対称性は自発的に破れることが証明される．くわしくは，拙著『量子現象の数理』(朝倉書店，2006) の 9.5 節を参照されたい．

第 8 章の演習問題

$\mathscr{K}$ を複素ヒルベルト空間とする．$\mathscr{K}$ 上の可閉作用素 C の閉包を $\bar{C}$ で表す[*14]．

1. Q を $\mathscr{K}$ 上の対称作用素とし，$H=Q^2$ とおく．H は本質的に自己共役であるとする．このとき $\bar{H}=\bar{Q}^2$ を示せ．

2. A を $\mathscr{K}$ 上の可閉作用素とし，B を $\mathscr{K}$ 上の有界線形作用素で $D(B)=\mathscr{K}$ を満たすものとする．任意の $\Psi\in D(A)$ に対して，$B\Psi\in D(A)$ であって $AB\Psi=-BA\Psi$ が成り立つとする．このとき，任意の $\Psi\in D(\bar{A})$ に対して $B\Psi\in D(\bar{A})$ であって，$\bar{A}B\Psi=-B\bar{A}\Psi$ が成り立つことを示せ．

3. A をヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ 上の線形作用素とする．このとき，$\sigma(-A)=\{-z\in\mathbb{C}\,|\,z\in\sigma(A)\}$ を示せ．

[*14] 付録 F を参照．

付録

写像と同値関係
ベクトル空間論要項
計量ベクトル空間
ベクトル解析
テンソル空間
ヒルベルト空間論における基本的事項

付録 A

写像と同値関係

この付録では，写像と同値関係に関する基本的事項を採録する．写像とは，通常の実数値関数や複素数値関数に現れている，ある普遍的構造を表す概念であり，同値関係なる概念は，同一性 (相等) の概念を拡大ないし "弱くした" ものである．いずれも，現代数学や現代数理物理学の展開にとってもっとも基礎的・根源的な概念の 1 つである[*1]．

A.1　写像

X, Y を空でない集合とする．

定義 A.1 X の各元 x に対して，Y の元 y をただ 1 つ定める対応 (規則) $f : x \longmapsto y$ を X から Y への**写像**という．この場合 $y = f(x)$ と記し (x に対応する，Y の元)，y を x に対する f の**像**または f の x における値という．X を f の**定義域**または**始域**，Y を f の**終域**という．X から X への写像を X **上の写像**という．

例 A.2 $I_{\mathsf{X}} : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{X}, I_{\mathsf{X}}(x) := x \ (x \in \mathsf{X})$ によって定義される写像 I_{X} (つまり，何も変えない写像) を X 上の**恒等写像** (identity mapping) という[*2]．X 上の恒等写像であることが文脈から明らかな場合には，I_{X} を単に I と記す場合がある．

X の空でない部分集合 D に対して，D の元に対する写像 $f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$ の像の全体を $f(D)$ で表す：

---

*1 この付録では，本文を読むために最小限必要な概念だけを叙述する．事実の証明やさらにくわしい内容については，たとえば，拙著『現代ベクトル解析の原理と応用』(共立出版，2006) の付録 A を参照されたい．

*2「$A := B$」は，「A を B によって定義する」ことを表す記法．

$$f(D) := \{f(x) | x \in D\} \subset \mathsf{Y}.$$

これを D の f による**像**または D に対する f の**値域**という．特に，$f(\mathsf{X})$ を f の**値域**と呼ぶ．

Y の部分集合 F に対して

$$f^{-1}(F) := \{x \in \mathsf{X} | f(x) \in F\}$$

— X の元で，その f による像が F に属するようなものの全体 — を，f による F の**原像**という．

写像 $f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$ に対して，直積集合 $\mathsf{X} \times \mathsf{Y} = \{(x,y) | x \in \mathsf{X}, y \in \mathsf{Y}\}$ の部分集合

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) | x \in \mathsf{X}\}$$

を**写像 f のグラフ**という．これは，通常の関数のグラフの概念の一般化である．

定義 A.3 (写像の相等) 2 つの写像 $f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}, g : \mathsf{X}' \longrightarrow \mathsf{Y}'$ (X', Y' は集合) が等しいというのは，$\mathsf{X} = \mathsf{X}', \mathsf{Y} = \mathsf{Y}'$ であって，かつすべての $x \in \mathsf{X}$ に対して，$f(x) = g(x)$ が成り立つことである．このとき，$f = g$ と記す．

2 つの写像 $f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}, g : \mathsf{Y} \longrightarrow \mathsf{Z}$ (Z は集合) が与えられると，各 $x \in \mathsf{X}$ に対して，Z の元 $g(f(x))$ が 1 つ定まる．したがって，この対応：$x \longmapsto g(f(x))$ は X から Z への写像を定める．この写像を $g \circ f$ と書き，f と g の**合成写像**と呼ぶ：

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad x \in \mathsf{X}.$$

一般に，$\mathsf{X}_1, \cdots, \mathsf{X}_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) を集合とし，$f_i : \mathsf{X}_i \longrightarrow \mathsf{X}_{i+1}$ ($i = 1, \cdots, n$) を写像とするとき

$$(f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(x) := f_n(f_{n-1}(\cdots(f_2(f_1(x)))\cdots)), \quad x \in \mathsf{X}_1,$$

によって定義される写像 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 : \mathsf{X}_1 \longrightarrow \mathsf{X}_{n+1}$ を $f_1, \cdots, f_n$ の**合成写像**という．

$f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$ を写像とする．$f(\mathsf{X}) = \mathsf{Y}$ のとき，f は**全射** (surjection) または Y の**上への写像**であるという．

$x \neq x'$ ($x, x' \in \mathsf{X}$) ならばつねに $f(x) \neq f(x')$ であるとき，f は **1 対 1** または**単射** (injection) であるという．

$f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$ が単射のとき，$f(\mathsf{X}) = \mathsf{Z}$ とすれば，Z から X への写像 $g : \mathsf{Z} \longrightarrow \mathsf{X}$ を $g(z) = x$ ($z \in \mathsf{Z}$) によって定義できる．ただし，x は $f(x) = z$ となる $x \in \mathsf{X}$ である (このような x は f の単射性により，z から一意的に決まる)．g を単射 f の**逆写像**

(inverse mapping) と呼び，記号的に $g=f^{-1}$ と表す．

$f:\mathsf{X}\longrightarrow\mathsf{Y}$ が単射のとき，逆写像 f^{-1} の定義域は $f(\mathsf{X})$ である．したがって

$$f\circ f^{-1}=I_{f(\mathsf{X})},\quad f^{-1}\circ f=I_{\mathsf{X}} \tag{A.1}$$

が成り立つ．

全射かつ単射である写像を**全単射** (bijection) という．

例 A.4 恒等写像は全単射である．

次の定理は，与えられた写像が全単射であるかどうかを判定する上で有用である．

定理 A.5 写像 $f:\mathsf{X}\longrightarrow\mathsf{Y}$ が全単射であるための必要十分条件は，写像 $g:\mathsf{Y}\longrightarrow\mathsf{X}$ で

$$f\circ g=I_{\mathsf{Y}},\quad g\circ f=I_{\mathsf{X}} \tag{A.2}$$

を満たすものが存在することである．この場合，$g=f^{-1}$ である．

A.2 同値関係と同値類

G を X の直積集合 $\mathsf{X}\times\mathsf{X}=\{(x,y)|x,y\in\mathsf{X}\}$ の空でない部分集合とする．X の 2 つの元 $x,y\in\mathsf{X}$ について $(x,y)\in G$ が成り立つとき **x は y と G 関係にある**といい，$x\overset{G}{\sim}y$ と記す．X の元の間の関連付け「$\overset{G}{\sim}$」を **G 関係**という．この種の構造を総称的に **X における関係**と呼ぶ．G が何であるかが文脈から明らかな場合には，$\overset{G}{\sim}$ を単に $\sim$ と記す場合がある．

X における任意の関係 $\sim$ について次の 3 つの律の概念が定義される：

(i) すべての $x\in\mathsf{X}$ に対して $x\sim x$ が成り立つとき，関係 $\sim$ は**反射律**を満たすという．

(ii) $x\sim y$ $(x,y\in\mathsf{X})$ ならばつねに $y\sim x$ が成り立つとき，関係 $\sim$ は**対称律**を満たすという．

(iii) $x\sim y, y\sim z$ $(x,y,z\in\mathsf{X})$ ならばつねに $x\sim z$ が成り立つとき，関係 $\sim$ は**推移律**を満たすという．

反射律，対称律，推移律のすべてを満たす関係を**同値関係**と呼ぶ[*3]．

[*3] 相等の関係 $=$ が同値関係であることは明らかであろう．したがって，同値関係は，相等の概念の一般化 (“弱化”) ないし拡大なのである．

$\sim$ を X における同値関係としよう．このとき，$x \sim y$ (したがって，$y \sim x$) ならば x と y は**同値**であるという[*4]．各 $x \in \mathsf{X}$ に対して，x と同値な元の全体

$$[x] := \{y \in \mathsf{X} | y \sim x\}$$

を x の**同値類**と呼ぶ．このとき，次の事実が証明される (証明は容易)：

(i) すべての $x \in \mathsf{X}$ に対して，$x \in [x]$.

(ii) $[x] = [y]$ であるための必要十分条件は $x \sim y$ である．

(iii) $[x] \neq [y]$ であるための必要十分条件は $[x] \cap [y] = \varnothing$ (空集合) である．

(iv) $\mathsf{X} = \bigcup_{x \in \mathsf{X}} [x]$.

これらの性質は次のことを意味する：X は，互いに素な同値類の和集合として表される．このことを「X は同値関係 $\sim$ によって**類別される**」という．同値類の全体

$$\mathsf{X}/\sim := \{[x] | x \in \mathsf{X}\}$$

を同値関係 $\sim$ による X の**商集合**と呼ぶ．(iv) によって，$\mathsf{X} = \bigcup_{A \in \mathsf{X}/\sim} A$.

[*4] この背後にある直観的描像は，$x \sim y$ ならば，($x \neq y$ であっても) x と y は，関係 $\sim$ においては，同じものとみなせるということである．これは，同一性の概念のある種の変革に関わる考え方であって，数学や数理物理学において，より緻密で深い認識をもたらす．

付録B

ベクトル空間論要項

B.1　ベクトル空間

B.1.1　ベクトル空間の公理系

$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すとする．

定義 B.1 以下の性質 (I), (II) を持つ集合 V を $\mathbb{K}$ 上の**ベクトル空間** (vector space) または**線形空間** (linear space) といい，その元をベクトルと呼ぶ．$\mathbb{K}$ をベクトル空間 V の**係数体**といい，$\mathbb{K}$ の元をスカラーと呼ぶ．

(I) 任意の 2 つの元 $u, v \in \mathsf{V}$ に対して，V の 1 つの元 $u+v$ — これを u と v の**和**と呼ぶ — が定まり，次の (I.1)~(I.4) が成り立つ．

(I.1) (**交換法則**) $u+v=v+u \ (u, v \in \mathsf{V})$.

(I.2) (**結合法則**) $u+(v+w)=(u+v)+w \ (u, v, w \in \mathsf{V})$.

(I.3) (**零ベクトルの存在**) $u+0_{\mathsf{V}}=u \ (u \in \mathsf{V})$ となる元 $0_{\mathsf{V}} \in \mathsf{V}$ がある．ベクトル 0_{V} を**零ベクトル** (zero vector) あるいはゼロベクトルという．

(I.4) (**逆ベクトルの存在**) 各 $u \in \mathsf{V}$ に対して，$u+(-u)=0_{\mathsf{V}}$ となるベクトル $-u \in \mathsf{V}$ が存在する．これを u の**逆ベクトル**と呼ぶ．

V の任意の 2 つの元の組 (u, v) に元 $u+v$ を対応させる演算を V の**加法**という．

(II) 任意の元 $u \in \mathsf{V}$ と任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して，V の 1 つの元 αu — これを u の α 倍 (u の**スカラー倍**) という — が定まり，次の (II.1)~(II.3) が成り立つ ($\alpha, \beta \in \mathbb{K}, u \in \mathsf{V}$ は任意)：

(II.1) (**スカラーの結合法則**) $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$.

(II.2) $1u=u$.

(II.3) (**分配法則**) すべての $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, u, v \in \mathsf{V}$ に対して

$$\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v, \quad (\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u.$$

$\mathbb{K}$ の元 α と $u\in\mathsf{V}$ に対してベクトル $\alpha u\in\mathsf{V}$ を対応させる演算を，**スカラー乗法**または**スカラー倍**と呼ぶ.

上の定義に述べられた性質 (I), (II) を**ベクトル空間の公理系**という．$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のとき V を**実ベクトル空間** (real vector space)，$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ のとき，V を**複素ベクトル空間** (comlex vector space) という．零ベクトル 0_{V} は V の**原点**とも呼ばれる．混乱のおそれがない場合には，0_{V} を単に 0 と記す.

3 以上の任意の自然数 n と n 個の任意のベクトル $u_1,\cdots,u_n\in\mathsf{V}$ に対して，和 $\sum_{j=1}^{n}u_j:=u_1+\cdots+u_n$ を次のように帰納的に定義する：

$$\sum_{j=1}^{n}u_j:=\left(\sum_{j=1}^{n-1}u_j\right)+u_n.$$

ベクトル $u\in\mathsf{V}$ と $v\in\mathsf{V}$ の**差** $u-v$ を

$$u-v:=u+(-v) \tag{B.1}$$

によって定義する.

例 B.2 $\mathsf{V}_1,\cdots,\mathsf{V}_n$ $(n\geq 2)$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，これらの直積集合 $\mathsf{V}=\mathsf{V}_1\times\cdots\times\mathsf{V}_n=\{u=(u_i)\,|\,u_i\in\mathsf{V}_i\ (i=1,\cdots,n)\}$ を考える．V の任意の 2 つの元 u,v に対して，和 $u+v$ とスカラー倍 au $(a\in\mathbb{K})$ を

$$u+v:=(u_1+v_1,\cdots,u_n+v_n), \quad au:=(au_1,\cdots,au_n)$$

によって定義する．V は，これらの和とスカラー乗法で $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．このベクトル空間を $\mathsf{V}_1,\cdots,\mathsf{V}_n$ の**直和** (direct sum) と呼び，記号的に $\mathsf{V}_1\oplus\cdots\oplus\mathsf{V}_n$ あるいは $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}}\mathsf{V}_i$ のように表す．$\mathsf{V}_i=\mathsf{V}$ $(i=1,\cdots,n)$ の場合，$\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}}\mathsf{V}_i$ を $\overset{n}{\oplus}\mathsf{V}$ と記し，これを V の n **直和**と呼ぶ.

ベクトル空間 $\mathbb{K}$ の n 直和 $\overset{n}{\oplus}\mathbb{K}$ の元を**数ベクトル**といい，$\overset{n}{\oplus}\mathbb{R}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ の場合) を**実 n 次元数ベクトル空間**，$\overset{n}{\oplus}\mathbb{C}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合) を**複素 n 次元数ベクトル空間**と呼ぶ．$\overset{n}{\oplus}\mathbb{K}$ は集合としては $\mathbb{K}^n$ に等しいので，通常，$\overset{n}{\oplus}\mathbb{K}$ を $\mathbb{K}^n$ とも書く.

例 B.3 X を任意の空でない集合，V を任意の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，X から V への写像 — **X 上の (V 値) ベクトル値関数** — の全体を $\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathsf{V})$ で表す．$F,G\in\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathsf{V})$ とすれば，任意の $x\in\mathsf{X}$ に対して $F(x),G(x)\in\mathsf{V}$ であるから，$F(x)+G(x)\in\mathsf{V},\alpha F(x)\in\mathsf{V}$ $(\forall\alpha\in\mathbb{K})$．したがって，和 $F+G:\mathsf{X}\longrightarrow\mathsf{V}$ とスカラー倍 αF:

$\mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{V}$ を

$$(F+G)(x) := F(x)+G(x), \quad (\alpha F)(x) := \alpha F(x), \quad x \in \mathsf{X}$$

によって定義できる．この和とスカラー倍に関して，$\mathscr{M}(\mathsf{X},\mathsf{V})$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．この場合，零ベクトル O は $O(x)=0_{\mathsf{V}}$ $(\forall x \in \mathsf{X})$ を満たす写像であり，F の逆ベクトルは $(-1)F$ である．写像 $O:\mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{V}$ を**零写像**という．

B.1.2　部分空間と基底

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間，W を V の空でない部分集合とする $(W \subset \mathsf{V})$．任意の $u,v \in W$ と $a,b \in \mathbb{K}$ に対して $au+bv \in W$ が成立するとき — このことを「W は V の和とスカラー倍で閉じている」という —，W を V の**線形部分空間** (linear subspace) または単に**部分空間** (subspace) と呼ぶ．

V の部分空間は，V の加法とスカラー倍でベクトル空間になる．

ベクトル $u_1,\cdots,u_k \in \mathsf{V}$ に対して，$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i$ $(a_i \in \mathbb{K})$ という形のベクトルを $u_1,\cdots,u_k$ の**1 次結合** (linear combination) または**線形結合**という．

V をベクトル空間とし，D を V の空でない部分集合とする．このとき，D の元の線形結合の全体からなる部分集合

$$\mathscr{L}(D) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i u_i \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, u_i \in D, a_i \in \mathbb{K}\ (i=1,\cdots,k) \right\}$$

は V の部分空間になる．これを D **によって生成される部分空間**という．

V の有限部分集合 D で $\mathscr{L}(D)=\mathsf{V}$ となるものが存在するとき，V は**有限次元**であるという．有限次元でないベクトル空間は**無限次元**であるという．

定義 B.4　V のベクトル $u_1,\cdots,u_k$ について，$a_1u_1+\cdots+a_ku_k=0$ $(a_i \in \mathbb{K}, i=1,\cdots,k)$ となるのが $a_i=0$ $(i=1,\cdots,k)$ のときに限るとき，$u_1,\cdots,u_k$ は**線形独立** (linearly independent) または**1 次独立**であるという．部分集合 $\{u_i\}_{i=1}^{k}$ が線形独立であるとは，$u_1,\cdots,u_k$ が線形独立のときをいう．

$u_1,\cdots,u_k$ が線形独立でないとき，これらは**線形従属** (linearly dependent) または**1 次従属**であるという．

注意 B.5　ベクトル $u_1,\cdots,u_n \in \mathsf{V}$ が線形独立ならば，$u_j \neq 0$ $(j=1,\cdots,n)$．

定義 B.6　V に属する n 個の元からなる線形独立な集合 $E=\{e_i\}_{i=1}^{n}$ があって $\mathsf{V}=\mathscr{L}(E)$ が成り立つとき，E を V の**基底** (basis) または単に**底**と呼ぶ．この場合，n

をVの**次元**と呼び，$n=\dim\mathsf{V}$と記す．次元がnのベクトル空間をn**次元ベクトル空間**という．

例B.7 数ベクトル空間$\mathbb{K}^n$において，ベクトル$\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,\cdots,n)$を次のように定義する：

$$\boldsymbol{e}_i := (0,0,\cdots,0,\overset{i\text{ 番目}}{1},0,\cdots,0)$$

(i番目の成分が1で他の成分はすべて0の数ベクトル)．$\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$は線形独立であり，任意の$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{K}^n$は$x=\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{e}_i$と表されることを示すのは難しくない．したがって$\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$は$\mathbb{K}^n$の基底であり，$\dim\mathbb{K}^n=n$が成り立つ．$\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$を$\mathbb{K}^n$の**標準基底** (standard basis) という．

$E=\{e_i\}_{i=1}^n$をVの基底とする．上述の基底の定義により，任意の$u\in\mathsf{V}$に対してn個の数の組$(u^1,\cdots,u^n)\in\mathbb{K}^n$が存在し

$$u=\sum_{i=1}^n u^i e_i \tag{B.2}$$

と表される[*1]．しかも，数の組$(u^1,\cdots,u^n)$はuから一意的に定まることも容易にわかる (基底の線形独立性による)．(B.2) をベクトル$u\in\mathsf{V}$の基底Eによる**展開**と呼び，$u^1,\cdots,u^n$を**展開係数**という．展開係数の組$(u^1,\cdots,u^n)\in\mathbb{K}^n$をベクトル$u$の基底$E$に関する**座標表示**または**成分表示**と呼ぶ．Vに基底を定めることは，幾何学的には，1つの座標系を定めることに対応する．この描像のもとに，Vと基底の組(V,E)をVの**線形座標系**または**直線座標系**という．

ベクトルの座標表示 (成分表示) は，もちろん，基底の取り方に依存している．そこで，基底の取り方 (線形座標系の設定) を変えたとき，ベクトルの座標表示がどうか変わるかを見ておこう．Eとは別のVの任意の基底を$F:=\{f_i\}_{i=1}^n$とし，この基底に関する$u\in\mathsf{V}$の座標表示を$(v^1,\cdots,v^n)\in\mathbb{K}^n$とする：$u=\sum_{i=1}^n v^i f_i\cdots(*)$．ベクトル$f_i$の基底$E$に関する座標表示を$(P_i^1,\cdots,P_i^n)\in\mathbb{K}^n$とすれば

$$f_i=\sum_{j=1}^n P_i^j e_j. \tag{B.3}$$

そこで，(i,j)成分がP_j^iである行列を$P=(P_j^i)$と記し，これをEからFへの**底変換の行列**と呼ぶ．(B.3) を$(*)$に代入し，それを (B.2) と比較することにより

[*1] ここでの「u^i」は「uのi乗」ではなく，uの上つきの添え字である．

$$u^i = \sum_{j=1}^{n} P^i_j v^j, \quad i = 1, \cdots, n \tag{B.4}$$

が示される．基底 F から E への底変換の行列を $Q = (Q^i_j)$ とすれば $(e_j = \sum_{k=1}^{n} Q^k_j f_k \cdots (**))$ $QP = I_n$ (n 次の単位行列) が成り立つ[*2]．したがって，P, Q は正則行列であり，$Q = P^{-1}, P = Q^{-1}$ が成り立つ．ゆえに，(B.4) は

$$v^i = \sum_{j=1}^{n} (P^{-1})^i_j u^j \tag{B.5}$$

と同値である．式 (B.4), (B.5) を基底の変換：$E \longmapsto F$ に伴うベクトル u の座標変換 (成分変換) 公式と呼ぶ[*3]．

B.2　線形作用素

B.2.1　定義

V, W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする (有限次元であるとは限らない)．写像 T: V $\longrightarrow$ W が，任意の $a, b \in \mathbb{K}$ と $u, v \in$ V に対して

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v) \tag{B.6}$$

を満たすとき，T を V から W への**線形写像** (linear mapping) または**線形作用素** (linear operator) あるいは**線形演算子**という．性質 (B.6) を写像の**線形性** (linearity) という．$T(u) = Tu$ とも記す．

線形作用素 T : V $\longrightarrow$ W の値域 T(V) は部分空間である．この部分空間を Ran(T) と表す場合がある．

B.2.2　行列表示

$\dim \mathsf{V} = n < \infty, \dim \mathsf{W} = m < \infty$ とし，$E = \{e_i\}_{i=1}^n, F = \{f_j\}_{j=1}^m$ をそれぞれ V, W の基底とする．T:V $\longrightarrow$ W を線形作用素とする．ベクトル $Te_i \in$ W の基底 F に関する成分表示を $(T^1_i, \cdots, T^m_i) \in \mathbb{K}^m$ とすれば，$Te_i = \sum_{j=1}^{m} T^j_i f_j$ が成り立つ．

[*2] (**) を (B.3) に代入せよ．

[*3] 線形座標系を変えるということはベクトルを変えることではない (それは上の記述から明らかであろう)．線形座標系の変換 (基底の取り方を変えること) は，ベクトルの座標表示 (成分表示) を変えるだけである．物理学の教科書の中には，線形座標系の変換をベクトルの変換 (これは V 上の写像) と称するような誤った記述がみられる場合があるので，ここであえて注意をする次第である．

したがって，任意の $x=\sum_{i=1}^{n} x^i e_i \in \mathsf{V}$ に対して

$$Tx=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i^j x^i\right) f_j. \tag{B.7}$$

これは $(Tx)^j=\sum_{i=1}^{n} T_i^j x^i$ $(j=1,\cdots,m)$ を意味する．ゆえに，ベクトルの成分表示を用いた場合，線形作用素 T の作用は行列

$$T_{E,F}:=(T_i^j) \tag{B.8}$$

の作用で表される．行列 $T_{E,F}$ を基底の組 E,F に関する T の**行列表示**と呼ぶ．もちろん，基底 E,F の取り方を変えれば，行列表示 $T_{E,F}$ も変わる．$T_E:=T_{E,E}$ とおく ($\mathsf{W}=\mathsf{V}, F=E$ の場合).

B.2.3 トレースと行列式

線形作用素の行列表示を利用することにより，線形作用素のトレースと行列式を定義することができる．V を $\mathbb{K}$ 上の n 次元ベクトル空間とし，T を V 上の線形作用素とする．$E=\{e_i\}_{i=1}^n$ を V の基底とし，$T_E=(T_j^i)$ を E に関する T の行列表示とする．このとき

$$\mathrm{Tr}\,T:=\sum_{i=1}^{n} T_i^i \tag{B.9}$$

によって定義されるスカラー量 $\mathrm{Tr}\,T$ は基底 E の取り方によらないことが証明できる[*4]．したがって，この定義は意味をもつ (well-defined)．T から定まるスカラー量 $\mathrm{Tr}\,T$ を T の**トレース**と呼ぶ．また

$$\det T:=\det T_E \tag{B.10}$$

(右辺は行列 T_E の行列式) によって定義されるスカラー量 $\det T$ も基底 E の取り方によらないことを証明することができる[*5]．$\det T$ を T の**行列式**と呼ぶ．

次の定理は，線形作用素の行列式の基本的性質をまとめたものである[*6]．

定理 B.8 V を有限次元ベクトル空間とし，A,B を V 上の線形作用素とする．

(i) $\det I_{\mathsf{V}}=1$.

[*4] 拙著『物理現象の数学的諸原理』(共立出版，2003) の 1.2.9 項を参照.

[*5] 基底を用いない定義の仕方については，拙著『物理現象の数学的諸原理』(共立出版，2003) の 1.6 節を参照.

[*6] これらの性質は，行列の行列式に関する性質 (線形代数学の本を参照) からただちに導かれる.

(ii) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

(iii) A が全単射であるための必要十分条件は $\det A \neq 0$ となることである．この場合，$\det A^{-1} = 1/\det A$.

B.2.4　核と単射性

$T:\mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{W}$ を線形作用素としよう．V の部分集合

$$\ker T := \{u \in \mathsf{V} | T(u) = 0\} \tag{B.11}$$

を T の**核** (kernel) という．T の線形性を使うと，$\ker T$ は V の部分空間であることがわかる．次の命題は有用である．

命題 B.9　線形作用素 $T:\mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{W}$ が単射であるための必要十分条件は $\ker T = \{0\}$ が成り立つことである．

B.2.5　固有値と固有ベクトル

ベクトル空間 V 上の線形作用素 T について，零でないベクトル $u \in \mathsf{V}$ と数 $\lambda \in \mathbb{K}$ があって $Tu = \lambda u$ が成り立つとき，λ を T の**固有値**，u をこれに属する (対応する) **固有ベクトル**という．この場合，$\ker(T - \lambda)$ を T の固有値 λ に属する**固有空間**といい，その次元 $m_\lambda := \dim\ker(T - \lambda)$ を λ の**多重度**という．$m_\lambda = 1$ のとき固有値 λ は**単純**であるといい，$m_\lambda \geq 2$ のとき λ は m_λ 重に**縮退**しているという．

T の固有値の全体を $\sigma_\mathrm{p}(T)$ で表し，これを T の**点スペクトル**という．

B.2.6　ベクトル空間の同型

$T:\mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{W}$ が全単射な線形作用素ならば，$T^{-1}:\mathsf{W} \longrightarrow \mathsf{V}$ も全単射な線形作用素である．そこで全単射な線形作用素 $T:\mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{W}$ を V から W への**同型写像**と呼び，この場合 V と W は T のもとで**同型**であるという．このことを記号的に $\mathsf{V} \overset{T}{\cong} \mathsf{W}$ と書く．

定理 B.10　$\dim\mathsf{V} = \dim\mathsf{W} < \infty$ とし，$T:\mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{W}$ を線形作用素とする．このとき，T が単射または全射ならば T は同型写像である．

B.2.7 線形作用素の空間

ベクトル空間 V, W に対して，V から W への線形作用素の全体を L(V,W) で表す．特に，V = W の場合，L(V) := L(V,V) とおく．L(V) の元は，V 上の**自己準同型写像** (endmorphism) とも呼ばれる[*7]．L(V,W) は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間である．

B.2.8 双対空間

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V から $\mathbb{K}$ への線形作用素，すなわち，L(V,$\mathbb{K}$) の元を V 上の**線形汎関数** (linear functional) または **1 次形式** (linear form) という[*8]．V 上の線形汎関数の全体

$$\mathsf{V}^* := \mathsf{L}(\mathsf{V}, \mathbb{K}) \tag{B.12}$$

を V の**双対空間**（そうつい）(dual space) と呼ぶ．$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき，V* の元を**実線形汎関数**，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき，V* の元を**複素線形汎関数**という．

$\dim \mathsf{V} = n < \infty$ とし，$E = \{e_i\}_{i=1}^n$ を V の基底とする．したがって，任意の $u \in \mathsf{V}$ は $u = \sum_{i=1}^n u^i e_i$ と展開される ($u^i \in \mathbb{K}$)．そこで，写像 $\phi^i : \mathsf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ を

$$\phi^i(u) := u^i, \quad u \in \mathsf{V} \tag{B.13}$$

によって定義すれば，$\phi^i \in \mathsf{V}^*$ であって，

$$\phi^i(e_j) = \delta^i_j, \quad i, j = 1, \cdots, n \tag{B.14}$$

が成り立つ．線形汎関数 ϕ^i $(i = 1, \cdots, n)$ の集合 $\{\phi^i\}_{i=1}^n$ は V* の基底になることが証明される．この基底を E の**双対基底** (dual basis) という．したがって

$$\dim \mathsf{V}^* = \dim \mathsf{V}. \tag{B.15}$$

$F = \{f_i\}_{i=1}^n$ を V の別の基底とし，その双対基底を $\{\psi^i\}_{i=1}^n$ とする．$P = (P^i_j)$ を底の変換：$E \longmapsto F$ の行列とする．したがって，$\psi^i = \sum_{k=1}^n R^i_k \phi^k$ と展開できる ($R^i_k \in \mathbb{K}$)．$\psi^i(f_j) = \delta^i_j$ であるから，

$$\delta^i_j = \sum_{k=1}^n R^i_k \phi^k(f_j) = \sum_{k=1}^n R^i_k \sum_{\ell=1}^n P^\ell_j \phi^k(e_\ell) = (RP)^i_j.$$

したがって，$RP = I_n$．これは $R = P^{-1}$ を意味する．ゆえに

[*7] L(V) = End(V) と書かれる場合もある．

[*8] 線形形式ともいう．

$$\psi^i = \sum_{j=1}^{n} (P^{-1})^i_j \phi^j. \tag{B.16}$$

これは

$$\phi^i = \sum_{j=1}^{n} P^i_j \psi^j \tag{B.17}$$

と同値である．(B.16), (B.17) は，**双対基底の間の変換則**を表す．

$\omega \in \mathsf{V}^*$ を任意にとり，基底 $\{\phi^i\}_i, \{\psi^i\}_i$ に関する成分表示をそれぞれ，$(\omega_i)_i$，(ω'_i) とする．すなわち

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \phi^i = \sum_{i=1}^{n} \omega'_i \psi^i. \tag{B.18}$$

第 1 の等号において，ϕ^i に (B.17) を代入して両辺を比較すれば

$$\omega'_i = \sum_{j=1}^{n} P^j_i \omega_j \tag{B.19}$$

が得られる．これは，ω の成分表示 (座標表示) の変換則を与える．

B.3　アファイン空間

B.3.1　定義と例

$\mathscr{A}$ を空でない集合，V をベクトル空間とする．V の各元 u に対して写像 $T_u : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ が定義されていて，次の条件 (A.1), (A.2) が満たされるとき，$\mathscr{A}$ を**アファイン空間** (affine space)，V をその**基準ベクトル空間**という：

(A.1)　任意の $u, v \in \mathsf{V}$ に対して，$T_u \circ T_v = T_{u+v}$.

(A.2)　$\mathscr{A}$ の任意の 2 点 P, Q に対して，$T_u(P) = Q$ となるベクトル $u \in \mathsf{V}$ がただ 1 つ存在する．

写像 T_u をベクトル u による $\mathscr{A}$ 上の**平行移動**と呼ぶ．$\dim \mathsf{V} = n$ のとき，$\mathscr{A}$ は n 次元であるといい，$\dim \mathscr{A} = n$ と書く．アファイン空間 $\mathscr{A}$ の基準ベクトル空間が V であることを明示したいときは，$\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathsf{V})$ と記す．

この定義において，点 $T_u(P)$ は，幾何学的には，点 P をベクトル u だけ平行移動して得られる点を意味する．この描像に対応して

$$P + u := T_u(P)$$

という記号を導入し，これを $P \in \mathscr{A}$ と $u \in \mathsf{V}$ の**和**という．$P, Q \in \mathscr{A}$ に対し，(A.2) によって定まるベクトル u を $Q - P$ と記す．したがって，$P + (Q - P) = Q$.

アファイン空間は，その定義から明らかなように，その中のどの2点も，平行移動によって移り合うという意味において，“対等”であるような点集合のことである．したがって，幾何学的対象が存在する空間や物理現象が展開される空間あるいは時空が，先験的に見て，どこにも特別な点を持たないとすれば，アファイン空間の概念は，そのような空間や時空の概念の自然な範疇の1つと考えられる．実際，本書の第2章と第4章で論述したように，ニュートン力学的時空や特殊相対論的時空の大枠はアファイン空間であると仮定することにより，統一的な理論展開が可能になる．

例 B.11 V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．単なる集合 (点集合) として考えた V を $\mathscr{V}$ と書こう．V の任意の元 u に対して，写像 $T_u:\mathscr{V}\longrightarrow\mathscr{V}$ を $T_u(v):=v+u$ ($v\in\mathscr{V}$) によって定義する．この写像は $\mathscr{V}$ の平行移動を与える．したがって，$\mathscr{V}$ はベクトル空間 V を基準ベクトル空間とするアファイン空間である．V をアファイン空間と見るとき，別の記号 $\mathscr{V}$ を用いるかわりに,「アファイン空間としての V」という言い方をする場合もある．

$\mathscr{A}$ をアファイン空間，V をその基準ベクトル空間とする．$P\in\mathscr{A}$ を任意に固定し，P と V のベクトルの組の全体

$$\mathscr{T}_P:=\{(P,u)\,|\,u\in\mathsf{V}\} \tag{B.20}$$

を考える．この集合は，次の和とスカラー倍の演算によって，$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる：

$$(P,u)+(P,v):=(P,u+v),\quad \alpha(P,u):=(P,\alpha u),\quad u,v\in\mathsf{V},\alpha\in\mathbb{K}.$$

このベクトル空間の零ベクトルは $(P,0_{\mathsf{V}})$ であり，(P,u) の逆ベクトルは $(P,-u)$ である．ベクトル空間としての $\mathscr{T}_P$ を点 P おける $\mathscr{A}$ の**接空間**という．このベクトル空間の元を点 P における**接ベクトル**，あるいは点 P を始点とする**束縛ベクトル**と呼ぶ． また，任意の点 $Q\in\mathscr{A}$ に対して，$\overrightarrow{PQ}:=(P,Q-P)$ を点 P に関する点 Q の**位置ベクトル**という．

写像 $A_P:\mathscr{T}_P\longrightarrow\mathsf{V}$ を

$$A_P(P,u):=u,\quad (P,u)\in\mathscr{T}_P \tag{B.21}$$

によって定義すれば，これは同型写像である．そこで，通常

$$\mathsf{V}_P:=A_P(\mathscr{T}_P)=\mathsf{V} \tag{B.22}$$

とおき，これを接空間 $\mathscr{T}_P$ と同一視する．この同一視においては，点 P に関する

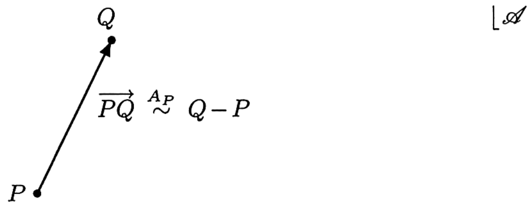


図 B.1　位置ベクトルの描像.

点 Q の位置ベクトルは $Q-P$ で表されることになる (図 B.1).

こうして，アファイン空間 $\mathscr{A}$ の点は，$\mathscr{A}$ に 1 つの点 P を固定することにより，$\mathsf{V}_P = \mathsf{V}$ のベクトルによって表される.

付録 C

計量ベクトル空間

ベクトル空間は，和とスカラー倍の代数的構造だけでなく，ベクトルの "長さ" やベクトルの間の "角度" を測る構造 — 計量的構造 — を持ちうる．この付録は，この側面に関する基本的事項をまとめたものである．

C.1　ベクトル空間の計量

定義 C.1 V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．写像 $g:\mathsf{V}\times\mathsf{V}\longrightarrow\mathbb{K};(u,v)\longmapsto g(u,v)$ $(u,v\in\mathsf{V})$ が次の条件を満たすとき，g を V 上の**計量** (metric) という．

(g.1) (**線形性**)　$g(w,\alpha u+\beta v)=\alpha g(w,u)+\beta g(w,v)$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{K},u,v,w\in\mathsf{V})$.

(g.2) (**対称性**)[*1] $g(u,v)^*=g(v,u)$ $(u,v\in\mathsf{V})$. ただし，複素数 $z\in\mathbb{C}$ に対して z^* は z の共役複素数を表す[*2].

(g.3) (**非退化性**)　ベクトル $v\in\mathsf{V}$ がすべての $u\in\mathsf{V}$ に対して $g(u,v)=0$ を満たすならば $v=0$.

計量 g を持つ $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V を $\mathbb{K}$ 上の**計量ベクトル空間**といい，(V,g) と記す．$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のとき，(V,g) を**実計量ベクトル空間**，$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ のとき**複素計量ベクトル空間**という．

V に計量 g を 1 つ固定して考える場合，しばしば $g(u,v)=\langle u,v\rangle_{\mathsf{V}}$ $(u,v\in\mathsf{V})$ という記法を用いる．このことを $g=\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathsf{V}}$ と記す (V の計量であることが文脈から明らかな場合には，添字の V を省略することもある).

各ベクトル $u\in\mathsf{V}$ に対して

---

*1 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合，**エルミート性**という場合もある．

*2 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のときは，$g(u,v)\in\mathbb{R}$ であるから，いまの条件は $g(u,v)=g(v,u)$ $(u,v\in\mathsf{V})$ となる．

$$\|u\|_{\mathsf{V}} := \sqrt{|g(u,u)|} = \sqrt{|\langle u,u\rangle_{\mathsf{V}}|} \tag{C.1}$$

によって定義されるスカラー量をベクトル u の**ノルム**と呼ぶ (ルートの中は絶対値をとることに注意：これは $g(u,u)$ がつねに非負とは限らないことによる)．これは，描像的には，ベクトルの "大きさ" あるいは "長さ" を定義するものである．どの計量ベクトル空間のノルムであるかが文脈から明らかな場合は，単に，$\|u\|_{\mathsf{V}} = \|u\|$ と書く．

定義 C.2 V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，g を V 上の計量とする．

(i) すべての $u \in \mathsf{V}$ に対して $g(u,u) \geq 0$ であるとき，g は**正定値**であるという．正定値計量は**内積** (inner product) とも呼ばれる．内積を持つ $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間を，$\mathbb{K}$ 上の**内積空間**または**前ヒルベルト空間**という．$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき，**実内積空間**，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の**複素内積空間**という．

(ii) $\{u \in \mathsf{V} | g(u,u) > 0\} \neq \varnothing$ かつ $\{u \in \mathsf{V} | g(u,u) < 0\} \neq \varnothing$ ならば，g は**不定計量**または**不定内積**と呼ばれる．不定計量を持つベクトル空間を**不定計量ベクトル空間**または**不定内積空間**という．

(iii) すべての $u \in \mathsf{V}$ に対して $g(u,u) \leq 0$ であるとき，g は**負定値**であるという．

注意 C.3 文献によっては，計量という言葉で正定値計量 (内積) だけを意味する場合があるから，注意されたい．

例 C.4 n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の任意の元 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ に対して

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_{\mathbb{R}^n} := g_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

とおくと，この g は，$\mathbb{R}^n$ 上の内積である．これによって，$\mathbb{R}^n$ は実内積空間になる．$g_{\mathbb{R}^n} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ を $\mathbb{R}^n$ の**ユークリッド内積**という．実内積空間 $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ を n 次元の**標準ユークリッドベクトル空間**と呼ぶ．

例 C.5 d を任意の自然数とする．$(d+1)$ 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^{d+1}$ の任意の元 $x = (x^0, x^1, \cdots, x^n), y = (y^0, y^1, \cdots, y^n)$ に対して，

$$g_{\mathrm{M}}(x,y) := x^0 y^0 - \sum_{i=1}^{d} x^i y^i$$

とおくと，この g_{M} は，$\mathbb{R}^{d+1}$ 上の不定計量である．これによって，$\mathbb{R}^{d+1}$ は不定計量ベクトル空間になる．g_{M} を $\mathbb{R}^{d+1}$ の**ミンコフスキー計量**または**ミンコフスキー

内積という．$(d+1)$ 次元の実不定計量ベクトル空間 $(\mathbb{R}^{d+1}, g_{\mathrm{M}})$ を $(d+1)$ 次元の**標準ミンコフスキーベクトル空間**と呼ぶ．

C.2 計量ベクトル空間の同型

V, W を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間とする．線形作用素 $T : \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{W}$ が内積を保存するとき，すなわち $\langle Tu, Tv \rangle_{\mathsf{W}} = \langle u, v \rangle_{\mathsf{V}}$ $(u, v \in \mathsf{V})$ が成り立つとき，T を**等長作用素**または**等距離作用素**と呼ぶ．

等長作用素は単射である．実際，T を等長作用素とし $Tu = 0$ とすれば，$\langle u, v \rangle_{\mathsf{V}} = 0$ $(\forall v \in \mathsf{V})$ であるので，V の計量の非退化性により $u = 0$ である．したがって，$\ker T = \{0\}$．

等長作用素 $T : \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{W}$ が全射であるとき，T を**計量同型写像**と呼ぶ．特に，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合の計量同型写像を**直交変換**，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合のそれを**ユニタリ作用素**または**ユニタリ変換**と呼ぶ．

V から W への計量同型写像 T が存在するとき，V と W は**計量同型**，または単に**同型**であるという．この場合，$\mathsf{V} \overset{T}{\cong} \mathsf{W}$ と記す．

C.3 直交系

定義 C.6 V を計量ベクトル空間とする．

(i) ベクトル $u \in \mathsf{V}$ が $\|u\|_{\mathsf{V}} = 1$ を満たすとき，u を**単位ベクトル**と呼ぶ．

(ii) 2 つのベクトル $u, v \in \mathsf{V}$ が $\langle u, v \rangle_{\mathsf{V}} = 0$ を満たすとき，u と v は**直交する**といい，$u \perp v$ または $v \perp u$ と記す．V の部分集合 D の任意の元と u が直交するとき，D と u は直交するといい，$D \perp u$ または $u \perp D$ のように表す．

(iii) V の部分集合 D の任意の異なる 2 つの元 $u, v \in D$ $(u \neq v)$ が直交するとき，D は V の**直交系**であるという．直交系 D の任意のベクトルが単位ベクトルのとき，D は**正規直交系**であるという．

(iv) $\dim \mathsf{V} = n < \infty$ とする．V の基底で正規直交系であるものを**正規直交基底**と呼ぶ．V と正規直交基底 $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ の組 (V, E) を**正規直交座標系**と呼ぶ．

計量ベクトル空間 V の空でない任意の部分集合 D に対して，D のすべてのベクトルと直交するベクトルの全体

$$D^{\perp} := \{v \in \mathsf{V} \mid \langle v,u\rangle = 0\ (\forall u \in D)\} \tag{C.2}$$

を D の**直交補空間**と呼ぶ．これは V の部分空間である．

例 C.7 $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ (例 B.7) は標準ユークリッドベクトル空間 $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ の正規直交基底である．

例 C.8 $(d+1)$ 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^{d+1}$ の標準基底を $\{\boldsymbol{e}_\mu\}_{\mu=0}^{d}$ と記す．ただし

$$\boldsymbol{e}_0 := (1,0,\cdots,0) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad \boldsymbol{e}_1 := (0,1,0,\cdots,0) \in \mathbb{R}^{d+1}, \cdots,$$

$$\boldsymbol{e}_d := (0,0,\cdots,1) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

$(d+1)$ 次の対角行列 $\eta = (\eta_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,\cdots,d}$ を次のように定義する：

$$\eta_{00} = 1, \quad \eta_{ii} = -1, \quad i = 1,\cdots,d, \tag{C.3}$$

$$\eta_{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu,\ \mu,\nu = 0,\cdots,d. \tag{C.4}$$

このとき

$$g_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{e}_\mu,\boldsymbol{e}_\nu) = \eta_{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 0,1,\cdots,d. \tag{C.5}$$

したがって，$\{\boldsymbol{e}_\mu\}_{\mu=0}^{d}$ は標準ミンコフスキーベクトル空間 $(\mathbb{R}^{d+1}, g_{\mathrm{M}})$ の正規直交基底である．

定義 C.9 (i) n 次元の実内積空間を n 次元**ユークリッドベクトル空間**と呼ぶ[*3]．

(ii) η を (C.3), (C.4) によって定義される行列とする．$(d+1)$ 次元実計量ベクトル空間 $(\mathsf{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathsf{V}})$ において，

$$\langle e_\mu, e_\nu\rangle_{\mathsf{V}} = \eta_{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 0,1,\cdots,d$$

を満たす基底 $\{e_\mu\}_{\mu=0}^{d}$ が存在するとき，V を $(d+1)$ 次元**ミンコフスキーベクトル空間**と呼ぶ．この場合，$\{e_\mu\}_{\mu=0}^{d}$ を V の**ローレンツ基底**という．標準ミンコフスキーベクトル空間 $(\mathbb{R}^{d+1}, g_{\mathrm{M}})$ は，$(d+1)$ 次元ミンコフスキーベクトル空間の一例である．

C.4 計量ベクトル空間の直和

V_i $(i = 1,\cdots,n)$ を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間とする．このとき，例 B.2 で見たように，これらのベクトル空間の直和 $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathsf{V}_i$ が定義される．任意の $u = (u_1,\cdots,u_n)$,

[*3] これは，標準ユークリッドベクトル空間の抽象版である．

$v=(v_1,\cdots,v_n)\in \bigoplus_{i=1}^{n} \mathsf{V}_i$ に対して

$$\langle u,v\rangle := \sum_{i=1}^{n} \langle u_i,v_i\rangle$$

を定義すれば，これは $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathsf{V}_i$ に計量を定める．これを計量とする計量ベクトル空間 $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathsf{V}_i$ を計量ベクトル空間 $\mathsf{V}_1,\cdots,\mathsf{V}_n$ の直和と呼ぶ.

$\mathsf{V}_1,\cdots,\mathsf{V}_n$ が内積空間ならば，$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathsf{V}_i$ も内積空間である.

C.5 計量アファイン空間

基準ベクトル空間 V が計量ベクトル空間であるアファイン空間 $\mathscr{A}(\mathsf{V})$ を**計量アファイン空間**と呼ぶ.

定義 C.10 n 次元ユークリッドベクトル空間を基準ベクトル空間とする計量アファイン空間を n 次元**ユークリッド空間**という.

例 C.11 標準ユークリッドベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を基準ベクトル空間とする，計量アファイン空間としての $\mathbb{R}^n$ は n 次元ユークリッド空間である.

定義 C.12 $(d+1)$ 次元ミンコフスキーベクトル空間を基準ベクトル空間とする，計量アファイン空間を $(d+1)$ **次元ミンコフスキー空間**という.

例 C.13 アファイン空間としての $\mathbb{R}^{d+1}$ の基準ベクトル空間を標準ミンコフスキーベクトル空間 $(\mathbb{R}^{d+1},g_{\mathrm{M}})$ (例 C.5) としたものは $(d+1)$ 次元ミンコフスキー空間の具象的実現の 1 つである.

C.6 表現定理

定理 C.14 (線形汎関数の表現定理) V を有限次元の計量ベクトル空間とする．このとき，各 $\phi\in\mathsf{V}^*$ に対して唯ひとつのベクトル $v_\phi\in\mathsf{V}$ が存在して

$$\phi(u)=\langle v_\phi,u\rangle,\quad u\in\mathsf{V} \tag{C.6}$$

が成り立つ.

V が有限次元の計量ベクトル空間であるとき，定理 C.14 によって，写像 $i_*:\mathsf{V}^*\longrightarrow\mathsf{V}$ を

$$i_*(\phi) := v_\phi \tag{C.7}$$

によって定義できる．

ベクトル $u \in \mathsf{V}$ ($\|u\| \neq 0$) に対して $\epsilon(u) \in \{\pm 1\}$ を

$$\epsilon(u) := \frac{\langle u, u \rangle}{\|u\|^2} \tag{C.8}$$

によって定義し，これを u の**符号**と呼ぶ (V が内積空間ならば，$\epsilon(u) = 1$ ($\forall u \in \mathsf{V} \setminus \{0\}$)).

$\dim \mathsf{V} = n$ とし，$\{e_i\}_{i=1}^n$ を V の任意の正規直交基底とすれば

$$i_*(\phi) = \sum_{i=1}^n \epsilon(e_i)\phi(e_i)^* e_i \tag{C.9}$$

が成り立つ[*4].

定理 C.15 i_* は全単射であり反線形である：$i_*(a\phi + b\psi) = a^* i_*(\phi) + b^* i_*(\psi)$ ($a, b \in \mathbb{K}, \phi, \psi \in \mathsf{V}^*$).

この定理に基づいて，i_* を V^* から V への**標準同型写像**と呼ぶ[*5].

$\phi, \psi \in \mathsf{V}^*$ に対して，$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathsf{V}^*}$ を

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathsf{V}^*} := \langle i_*(\psi), i_*(\phi) \rangle_{\mathsf{V}} \tag{C.10}$$

によって定義する．ただし，$i_* : \mathsf{V}^* \longrightarrow \mathsf{V}$ は (C.7) によって定義される写像である．このとき，$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathsf{V}^*}$ は V^* の計量である．これを V^* の**自然な計量**と呼ぶ．

C.7　内積空間とヒルベルト空間

C.7.1　内積空間のノルムに関する性質

定理 C.16 $(\mathsf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を内積空間とする．このとき，次の (i)〜(iii) が成り立つ．

(i) (シュヴァルツの不等式)

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \quad u, v \in \mathsf{V}. \tag{C.11}$$

(ii) (正定値性) $u \in \mathsf{V}$ が $\|u\| = 0$ を満たすならば $u = 0$.

(iii) (3 角不等式)

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad u, v \in \mathsf{V}. \tag{C.12}$$

[*4] 右辺を (C.6) の v_ϕ に代入してみよ．

[*5] $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合は，より正確には，**反同型写像**と呼ばれる．

注意 C.17 不定内積空間に対しては，定理 C.16 は，一般には成立しない．

C.7.2 点列の収束と極限

V を内積空間とし，その内積とノルムをそれぞれ，$\langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|$ によって表す．

自然数全体 $\mathbb{N}$ から V への写像：$\mathbb{N}\ni n\longmapsto u_n\in \mathsf{V}$ を V の**点列**または**ベクトル列**と呼び，$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ または単に $u_n, \{u_n\}_n$ のように表す．

定義 C.18 V の点列 $\{u_n\}_n$ とベクトル $u\in\mathsf{V}$ について $\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|=0$ が成り立つとき，点列 $\{u_n\}_n$ は u に**収束する**といい，このことを記号的に $\lim_{n\to\infty}u_n=u$ または $u_n\longrightarrow u\ (n\longrightarrow\infty)$ で表す．u を点列 $\{u_n\}_n$ の**極限**と呼ぶ．厳密にいえば，$\lim_{n\to\infty}u_n=u$ であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して番号 n_0 (ε に依存しうる) が存在して，$n\geq n_0$ ならば $\|u_n-u\|<\varepsilon$ が成り立つことである．

収束する点列を**収束列** (convergent sequence) と呼ぶ．

命題 C.19 $\{u_n\}_n, \{v_n\}_n$ を V の収束列とし，$\lim_{n\to\infty}u_n=u\in\mathsf{V}$, $\lim_{n\to\infty}v_n=v\in\mathsf{V}$ とする．このとき，次の (i), (ii) が成り立つ：

(i) **(ノルムの連続性)** $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|=\|u\|$.

(ii) **(内積の連続性)** $\lim_{n\to\infty}\langle u_n,v_n\rangle=\langle u,v\rangle$.

V が有限次元内積空間の場合には，V のベクトル列の収束はベクトル列の各成分の収束に帰着される．すなわち，次の定理が成り立つ．

命題 C.20 V は p 次元内積空間 ($p<\infty$) であるとし，$u\in\mathsf{V}, \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を V の点列とする．

(i) $\lim_{n\to\infty}u_n=u$ ならば，V の任意の基底に関する u_n, u の展開 $u_n=\sum_{i=1}^{p}u_n^ie_i, u=\sum_{i=1}^{p}u^ie_i$ について，$\lim_{n\to\infty}u_n^i=u^i\ (i=1,\cdots,p)$ が成り立つ．

(ii) V のある基底 $\{f_i\}_{i=1}^{p}$ に関する u_n, u の展開 $u_n=\sum_{i=1}^{p}u_n^if_i, u=\sum_{i=1}^{p}u^if_i$ について，$\lim_{n\to\infty}u_n^i=u^i\ (i=1,\cdots,p)$ が成り立つならば，$\lim_{n\to\infty}u_n=u$.

C.7.3 コーシー列とヒルベルト空間

定義 C.21 $\{u_n\}_n$ を内積空間 V の点列とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して番号 $n_0\in\mathbb{N}$ があって，$n,m\geq n_0$ ならば $\|u_n-u_m\|<\varepsilon$ が成り立つとき，$\{u_n\}_n$ を V の**基本**

列またはコーシー列という.

内積空間 V のすべてのコーシー列が収束列であるとき，V は**完備**であるいう．完備な内積空間を**ヒルベルト空間**と呼ぶ．$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ の場合のヒルベルト空間を**実ヒルベルト空間**，$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合のヒルベルト空間を**複素ヒルベルト空間**という.

定理 C.22 任意の有限次元内積空間はヒルベルト空間である.

C.7.4 開集合と閉集合

V を内積空間とする．点 $u \in \mathsf{V}$ と $r>0$ に対して定まる部分集合

$$U_r(u) := \{v \in \mathsf{V} \mid \|u-v\| < r\} \tag{C.13}$$

を u の r **近傍**または u を中心とする半径 r の**開球**と呼ぶ.

$D \subset \mathsf{V}$ とする．D の任意の点 u に対してある正数 $\delta>0$ が存在して，$U_\delta(u) \subset D$ が成り立つとき，D を**開集合**と呼ぶ.

命題 C.23 任意の $r>0$ と $u \in \mathsf{V}$ に対して，$U_r(u)$ は開集合である.

$F \subset \mathsf{V}$ の補集合 $F^c := \mathsf{V} \setminus F$ が開集合であるとき，F を**閉集合**と呼ぶ.

定義 C.24 V の部分集合 D に対して，D の収束列の極限となっているような点の全体

$$\overline{D} := \left\{ u \in \mathsf{V} \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ となる } u_n \in D \text{ が存在} \right\} \tag{C.14}$$

を D の**閉包**と呼ぶ.

命題 C.25 任意の $D \subset \mathsf{V}$ に対して $D \subset \overline{D}$ であり，$\overline{D}$ は閉集合である.

C.8 ベクトル場の連続性

V, W を計量ベクトル空間とする．D を V の部分集合とし，$f : D \longrightarrow \mathsf{W}; D \ni x \longmapsto f(x) \in \mathsf{W}$ を D から W への写像とする．この型の写像を D 上の **W 値ベクトル場**と呼ぶ[*6]．特に，D 上の V 値ベクトル場 ($\mathsf{W}=\mathsf{V}$ の場合) を単に D 上の**ベクトル場**という.

V, W はともに内積空間であるとし，$x_0 \in D$ とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，正数 $\delta>0$ があって，$\|x-x_0\|_{\mathsf{V}} < \delta$ $(x \in D)$ ならば $\|f(x)-f(x_0)\|_{\mathsf{W}} < \varepsilon$ が成り立つ

[*6] 描像的には，D の各点 x に W のベクトル $f(x)$ が付随している状態を表す.

とき，f は点 x_0 で**連続**であるという．このことを $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ と記す．f が D のすべての点で連続であるとき，f は D 上で**連続**であるという．

C.9　有限次元の不定計量ベクトル空間における点列の収束，開集合，写像の連続性

(V,g) を有限次元の不定計量ベクトル空間とする．任意の有限次元ベクトル空間にはつねに内積が導入されうる[*7]．そこで，V の任意の内積 h を固定し，(V,g) の点列の収束性を内積空間 (V,h) のそれによって定義する．すなわち，(V,g) の点列 $\{u_n\}_n$ が $u \in (\mathsf{V},g)$ に収束すること — 記号的に $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ と記す — を $\lim_{n\to\infty} h(u_n - u, u_n - u) = 0$ によって定義する．このとき，**計量の連続性**が成立する：$\lim_{n\to\infty} u_n = u$, $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ $(v_n, v \in (\mathsf{V},g))$ ならば $\lim_{n\to\infty} g(u_n, v_n) = g(u,v)$.

(V,g) の開集合は，(V,h) の開集合であると定義する．これらの定義は，h の取り方によらないことが示される．

(V,g) の部分集合 D から計量ベクトル空間 W (不定計量ベクトル空間の場合は有限次元とする) への写像の連続性は，内積空間 (V,h) の部分集合としての D から内積空間 (W,h') (h' は W の任意の内積) への写像の連続性として定義する (この定義も，h, h' の取り方によらない)．この連続性の概念を用いることにより，有限次元不定計量ベクトル空間においても，連続なベクトル場の概念が C.8 節と同じ形式で定義される．

[*7] W を任意の N 次元ベクトル空間 ($N \in \mathbb{N}$ も任意)，$e_1, \cdots, e_N$ を W の基底とし，任意の $u, v \in \mathsf{W}$ のこの基底に関する成分表示を $(u^i)_{i=1}^N, (v^i)_{i=1}^N$ とする．たとえば，写像 $g: \mathsf{W} \times \mathsf{W} \longrightarrow \mathbb{K}$ を $g(u,v) := \sum_{i=1}^N (u^i)^* v^i$ によって定義すれば，これは W の内積である．よりくわしいことは，拙著『現代ベクトル解析の原理と応用』(共立出版，2006) の第 4 章，4.8 節を参照．

付録D

ベクトル解析

この付録では，計量ベクトル空間に関わる解析学 — ベクトル解析 — の基礎的部分を叙述する．

D.1 曲線

$(\mathsf{V},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ を $\mathbb{K}$ 上の内積空間とする．$a,b\in\mathbb{R}$ $(a<b)$ とする．閉区間 $[a,b]:=\{t\in\mathbb{R}|a\le t\le b\}$ から V への連続写像 $X:[a,b]\longrightarrow\mathsf{V}$ を**曲線**と呼ぶ[*1]．この場合，$X(a)\in\mathsf{V}$ を X の**始点**，$X(b)\in\mathsf{V}$ を X の**終点**という．

曲線 $X:[a,b]\longrightarrow\mathsf{V}$ が $X(a)=X(b)$ を満たすとき (つまり，始点と終点が一致するとき)，X は**閉曲線** (closed curve) であるという．

$X:[a,b]\longrightarrow\mathsf{V}$ とし (連続性は仮定しない)，$t_0\in[a,b]$ とする．極限

$$v_0:=\lim_{h\to 0}\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}$$

$(h\in\mathbb{R}\setminus\{0\},t_0+h\in[a,b])$ が存在するとき，X は t_0 **において微分可能**であるといい，v_0 を X の $t=t_0$ における**微分係数**という．

X が $t=t_0$ で微分可能ならば，X は $t=t_0$ で連続である．

すべての $t\in[a,b]$ において，X が微分可能であるとき，X は $[a,b]$ **上で微分可能**であるという．この場合，各 t における X の微分係数を $X'(t)$ また $\dot{X}(t)$ あるいは $\dfrac{dX(t)}{dt},dX(t)/dt$ と記す：

$$\lim_{h\to 0}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}=X'(t)=\dot{X}(t)=\frac{dX(t)}{dt}.$$

この場合，対応 $X':t\longrightarrow X'(t)$ は $[a,b]$ から V への写像を定める．この写像を X

---

*1 連続写像の概念については，付録 C の C.8 節を参照．

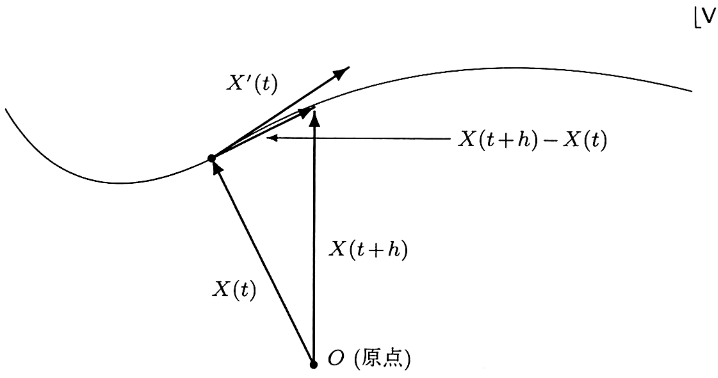


図 **D.1** 内積空間 V における曲線の導関数の幾何学的イメージ.

の**導関数**と呼ぶ．X' が $[a,b]$ 上で連続であるとき，曲線 X は $[a,b]$ 上で**連続微分可能**であるという．

V をアファイン空間と見るとき (付録 B, 例 B.11 を参照)，$X'(t)$ は点 $X(t)$ における束縛ベクトル，すなわち接空間 $\mathsf{V}_{X(t)}$ の元である．これを曲線 X の点 $X(t)$ における**接ベクトル** (tangent vector) と呼ぶ (図 D.1)．

写像 $X:[a,b]\longrightarrow\mathsf{V}$ が微分可能で $X':[a,b]\longrightarrow\mathsf{V}$ も微分可能であるとき，X は $[a,b]$ 上で **2 回微分可能**であるといい，X' の導関数を X'' または $\ddot{X}$ あるいは $\dfrac{d^2X(t)}{dt^2}$ と記す．これを X の **2 階導関数**と呼ぶ．$n\geq 2$ に対する X の n **回微分可能性**と n **階導関数** — $X^{(n)}$ と記す — は，次のようにして帰納的に定義される：X が $[a,b]$ 上で n 回微分可能であるとき，$X^{(n)}$ が $[a,b]$ 上で微分可能ならば X は $[a,b]$ 上で $(n+1)$ 回微分可能であるといい，$X^{(n+1)}:=(X^{(n)})'$ を X の $(n+1)$ 階導関数と呼ぶ．$X^{(n)}(t)$ を $\dfrac{d^nX(t)}{dt^n}$ とも記す．X が $[a,b]$ 上で n 回微分可能であり，$X^{(n)}$ が $[a,b]$ 上連続であるとき，X は n **回連続微分可能**であるという．

定理 D.1 $X,Y:[a,b]\longrightarrow\mathsf{V}$ は微分可能であるとする．このとき，$\langle X(t),Y(t)\rangle_{\mathsf{V}}$ は $t\in[a,b]$ について微分可能であり

$$\frac{d}{dt}\langle X(t),Y(t)\rangle_{\mathsf{V}}=\langle\dot{X}(t),Y(t)\rangle_{\mathsf{V}}+\langle X(t),\dot{Y}(t)\rangle_{\mathsf{V}} \qquad \text{(D.1)}$$

が成り立つ．

証明 $F(t)=\langle X(t),Y(t)\rangle_{\mathsf{V}}$ とおくと，$t+h\in[a,b]$ を満たす $h\neq 0$ に対して

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h}$$
$$=\left\langle\frac{X(t+h)-X(t)}{h},Y(t+h)\right\rangle_{\mathsf{V}}+\left\langle X(t),\frac{Y(t+h)-Y(t)}{h}\right\rangle_{\mathsf{V}}.$$

計量の連続性により，$h\longrightarrow 0$ のとき，右辺は $\langle\dot{X}(t),Y(t)\rangle_{\mathsf{V}}+\langle X(t),\dot{Y}(t)\rangle_{\mathsf{V}}$ に収束する．したがって，題意が成立する．■

D.2　曲線の積分

V を N 次元内積空間 $(N\in\mathbb{N})$ とし，$\{e_i\}_{i=1}^N$ を V の基底とする．曲線 $X:[a,b]\longrightarrow\mathsf{V}$ を

$$X(t)=\sum_{i=1}^N X^i(t)e_i \tag{D.2}$$

と展開する $(X^i(t)\in\mathbb{K})$．対応 $X^i:[a,b]\longrightarrow\mathbb{K};t\longmapsto X^i(t)$ は $[a,b]$ 上のスカラー値関数である．これを基底 $\{e_i\}_{i=1}^N$ に関する X の**第 i 成分関数**という．

X^i は $[a,b]$ 上で連続であることがわかる．したがって，リーマン積分 $\int_a^b X^i(t)\,dt$ が定義される．そこで

$$\int_a^b X(t)\,dt:=\sum_{i=1}^N\left(\int_a^b X^i(t)\,dt\right)e_i \tag{D.3}$$

という V のベクトルを定義し，これを点 a から点 b にわたる曲線 X の**リーマン積分**あるいは単に**積分**と呼ぶ．このような積分を**ベクトル値積分**という．これは基底 $\{e_i\}_{i=1}^N$ の取り方によらないこともわかる．したがって，定義 (D.3) は意味を持つ．

点 b から点 a にわたる曲線 X の積分は

$$\int_b^a X(t)\,dt:=-\int_a^b X(t)\,dt \tag{D.4}$$

と定義する．

定理 D.2　$c\in[a,b]$, $X:[a,b]\longrightarrow\mathsf{V}$ を連続曲線とし，$G(t)=\int_c^t X(s)\,ds$ $(t\in[a,b])$ とおく．このとき，$G:[a,b]\longrightarrow\mathsf{V}$ は連続微分可能な曲線であって

$$G'(t)=X(t),\quad t\in[a,b]$$

が成り立つ．

次の定理は基本的である．

定理 D.3 任意の連続微分可能な曲線 $X:[a,b]\longrightarrow \mathsf{V}$ と任意の $c\in[a,b]$ に対して

$$X(t)-X(c)=\int_c^t X'(s)\,ds,\quad t\in[a,b] \tag{D.5}$$

が成り立つ．

D.3 曲線の長さ

$X:[a,b]\longrightarrow \mathsf{V}$ を連続微分可能な曲線とする．このとき，3 角不等式により

$$|\|\dot{X}(t)\|-\|\dot{X}(s)\||\le\|\dot{X}(t)-\dot{X}(s)\|,\quad t,s\in[a,b]$$

であるから，$\|\dot{X}(t)\|$ は t について連続である．したがって，リーマン積分

$$L_X=\int_a^b\|\dot{X}(t)\|\,dt \tag{D.6}$$

が定義される．これを X の長さと呼ぶ[*2]．

命題 D.4 V を N 次元内積空間 $(N\in\mathbb{N})$ とし，$\{e_i\}_{i=1}^N$ を V の任意の基底とする．曲線 $X:[a,b]\longrightarrow \mathsf{V}$ を (D.2) のように展開する．このとき，X が $[a,b]$ 上で連続微分可能であるための必要十分条件は各 X^i $(i=1,\cdots,N)$ が $[a,b]$ 上で連続微分可能であることである．この場合

$$\dot{X}(t)=\sum_{i=1}^N\dot{X}^i(t)e_i \tag{D.7}$$

が成り立つ．

例 D.5 (曲線の長さの成分表示) V を N 次元内積空間とし，曲線 $X:[a,b]\longrightarrow \mathsf{V}$ は $[a,b]$ 上で連続微分可能であるとする．$\{e_i\}_{i=1}^N$ を V の任意の基底とする．このとき，(D.7) により

$$\|\dot{X}(t)\|=\sqrt{\sum_{i,j=1}^N\dot{X}^i(t)^*\dot{X}^j(t)g_{ij}}.$$

ただし，$g_{ij}:=\langle e_i,e_j\rangle$．ゆえに

$$L_X=\int_a^b\sqrt{\sum_{i,j=1}^N\dot{X}^i(t)^*\dot{X}^j(t)g_{ij}}\,dt \tag{D.8}$$

である．特に，$e_1,\cdots,e_N$ が正規直交基底ならば，$g_{ij}=\delta_{ij}$ であるから

[*2] この定義は V が無限次元内積空間の場合でも有効である ($\because$ V の有限次元性は使っていない)．

$$L_X = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^N |\dot{X}^i(t)|^2}\, dt \tag{D.9}$$

と表示される．

D.4　スカラー場

D.4.1　微分形式

Vを$\mathbb{K}$上の内積空間，DをVの部分集合とする．Dから$\mathbb{K}$への写像$f:D\longrightarrow\mathbb{K}$を$D$上の**スカラー場**(ば)または**スカラー値関数**という．$\mathbb{K}=\mathbb{R}$の場合，**実スカラー場**，$\mathbb{K}=\mathbb{C}$の場合，**複素スカラー場**という．

以下，DはVの開集合であるとする(付録CのC.7.4項を参照)．このとき$x\in D$とすれば，ある$\delta_x>0$があって，$\|x-x'\|<\delta_x$ならば$x'\in D$である．したがって，特に，$y\in\mathsf{V}\setminus\{0\}, |h|<\delta_x/\|y\|, h\in\mathbb{K}$ならば，$x+hy\in D$である．つまり，$x\in D, y\in\mathsf{V}$に対して，$|h|$が十分小さければ$x+hy\in D$ ($y=0$のときは自明)．

定義 D.6　$f:D\longrightarrow\mathbb{K}$とする．$x\in D, y\in\mathsf{V}$を固定したとき

$$f'(x,y):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hy)-f(x)}{h}$$

が存在するとき，fは点xにおいてy**方向に微分可能**であるといい，$f'(x,y)$をx**における**y**方向の微分係数**と呼ぶ．

すべての$x\in D$と$y\in\mathsf{V}$に対して$f'(x,y)$が存在するとき，fはD上で**微分可能**であるという．

fがD上で微分可能であって，任意の$y\in\mathsf{V}$に対して$f'(x,y)$がxに関してD上で連続であるとき，fはDにおいて**連続微分可能**であるという．

次の定理はスカラー場の理論の基礎となる．

定理 D.7　$f:D\longrightarrow\mathbb{K}$は$D$上で連続微分可能であるとする．このとき，任意の$x\in D$に対して，$f'(x,y)$は$y\in\mathsf{V}$について線形である．

$f:D\longrightarrow\mathbb{K}$は$D$上で連続微分可能であるとしよう．このとき，各$x\in D$に対して写像$\phi_x:\mathsf{V}\longrightarrow\mathbb{K}$を$\phi_x(y):=f'(x,y)$によって定義すれば，定理D.7によって，$\phi_x$はV上の線形汎関数，すなわち双対空間$\mathsf{V}^*$の元である：$\phi_x\in\mathsf{V}^*$．すると，写像$df:D\longrightarrow\mathsf{V}^*$を

$$(df)(x):=\phi_x,\quad x\in D$$

によって定義できる．したがって

$$(df)(x)(y) = f'(x,y), \quad x \in D, y \in \mathsf{V}$$

(左辺は，$df(x) \in \mathsf{V}^*$ の y における値と読む) が成り立つ．写像 df を f の**微分形式**あるいは単に**微分**と呼ぶ．

例 D.8 V が $\mathbb{K}$ 上の n 次元計量ベクトル空間 (不定計量でもよい) とし，$f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ は連続微分可能であるとしよう．$E := \{e_1, \cdots, e_n\}$ を V の基底とすれば，任意の $x \in \mathsf{V}$ は $x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$ と展開できる ($(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{K}^n$)．$f_E(x^1, \cdots, x^n) := f\left(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i\right)$ とし

$$D_{\mathbb{K}^n} := \left\{ (x^1, \cdots, x^n) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \in D \right\} \subset \mathbb{K}^n$$

とおけば，f_E は $D_{\mathbb{K}^n}$ 上の関数と見ることができる．

仮定により，各 i に対して $f'(x, e_i)$ が存在する．一方

$$\begin{aligned} f'(x, e_i) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f_E(x^1, \cdots, x^i + h, \cdots, x^n) - f_E(x^1, \cdots, x^n))}{h} \\ &= \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

ただし

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i} := \frac{\partial f_E(x^1, \cdots, x^n)}{\partial x^i}. \tag{D.10}$$

任意の $y = \sum_{i=1}^{n} y^i e_i \in \mathsf{V}$ ($y^i \in \mathbb{K}$) に対して $f'(x,y) = \sum_{i=1}^{n} y^i f'(x, e_i)$ であるから

$$(df)(x)(y) = f'(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} y^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \phi^i(y).$$

ただし，$\{\phi^1, \cdots, \phi^n\} \subset \mathsf{V}^*$ は E の双対基底である．したがって

$$(df)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \phi^i. \tag{D.11}$$

ゆえに，双対基底 $\{\phi^i\}_{i=1}^{n}$ に関する $(df)(x)$ の成分表示は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} f(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n} f(x) \right)$$

である．

D.4.2　勾配ベクトル

V を有限次元計量ベクトル空間，D を V の開集合，$f:D\longrightarrow\mathbb{K}$ は連続微分可能とする．V* から V への標準同型写像 i_* (付録 C, C.6 節) を用いて，ベクトル場 $\mathrm{grad}\,f:D\longrightarrow\mathsf{V}$ を

$$(\mathrm{grad}\,f)(x):=i_*((df)(x)),\quad x\in D \tag{D.12}$$

によって定義する．この写像を f の**勾配**または**グラディエント** (gradient) という．ベクトル $(\mathrm{grad}\,f)(x)$ を x における f の**勾配ベクトル**，$\mathrm{grad}\,f$ をスカラー場 f の**勾配ベクトル場**と呼ぶ．

線形汎関数の表現定理 (定理 C.14) により

$$(df)(x)(y)=f'(x,y)=\langle(\mathrm{grad}\,f)(x),y\rangle,\quad x\in D, y\in\mathsf{V}. \tag{D.13}$$

したがって，$E=\{e_i\}_{i=1}^n$ を V の正規直交基底とすれば，(D.11) と (C.9) より

$$(\mathrm{grad}\,f)(x)=\sum_{i=1}^n\epsilon(e_i)\frac{\partial f(x)^*}{\partial x^i}e_i. \tag{D.14}$$

ただし，$x=\sum_{i=1}^n x^ie_i$. ゆえに，正規直交基底 E に関する $(\mathrm{grad}\,f)(x)$ の成分表示は

$$\left(\epsilon(e_1)\frac{\partial f(x)^*}{\partial x^1},\cdots,\epsilon(e_n)\frac{\partial f(x)^*}{\partial x^n}\right)$$

である ($(df)(x)$ の成分表示との違いに注意).

注意 D.9　V がユークリッドベクトル空間の場合には，V の正規直交基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ による $(\mathrm{grad}\,f)(x)$ の成分表示と，その双対基底による $(df)(x)$ の成分表示は一致する．しかし，これまでの論述から明らかなように，$(df)(x)$ と $(\mathrm{grad}\,f)(x)$ は概念的には異なるものである．座標表示に頼る旧式のベクトル解析ではこの点もまた明晰には認識されにくい.

D.4.3　合成写像の微分

次の定理は第 2 章で使用するので証明を与えておく．

定理 D.10　V を有限次元計量ベクトル空間，D は V の開集合とする．$f:D\longrightarrow\mathbb{K}$ は連続微分可能とする．$X:[a,b]\longrightarrow D$ を連続微分可能な曲線とし，$g(t)=f(X(t))$ $(t\in[a,b])$ とすれば，g は連続微分可能であり

$$\frac{dg(t)}{dt}=\langle(\mathrm{grad}\,f)(X(t)),\dot{X}(t)\rangle. \tag{D.15}$$

したがって，特に，任意の $t_0, t\in[a,b]$ に対して

$$g(t)-g(t_0)=\int_{t_0}^{t}\langle(\operatorname{grad} f)(X(s)),\dot{X}(s)\rangle\,ds. \tag{D.16}$$

証明 $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ として

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\frac{f(X(t+h))-f(X(t))}{h}.$$

X は微分可能であるので $X(t+h)=X(t)+\dot{X}(t)h+o(h)=X(t)+h(\dot{X}(t)+r(h))$ $(r(h)=o(h)/h)$ と書ける．ただし，$o(h)$ は $\lim_{h\to 0}o(h)/h=0$ を満たすベクトルを表す記法である．$\operatorname{grad} f$ の定義により

$$f(x+hy)=f(x)+\langle(\operatorname{grad} f)(x),y\rangle h+o(h). \tag{D.17}$$

これを応用すれば

$$\frac{f(X(t+h))-f(X(t))}{h}=\langle(\operatorname{grad} f)(X(t)),\dot{X}(t)+r(h)\rangle+\frac{o(h)}{h}.$$

そこで，$h\longrightarrow 0$ とすれば，(D.15) が得られる．(D.15) を t_0 から t まで積分すれば (D.16) が得られる． ■

D.5 ベクトル場の微分

V, W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元計量ベクトル空間，D を V の開集合とする．$\phi: D\longrightarrow$ W とする．すべての $x\in D$ と $y\in$ V に対して

$$\phi'(x,y):=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(x+\varepsilon y)-\phi(x)}{\varepsilon}\in \mathsf{W}$$

が存在するとき，ϕ は D 上で**微分可能**であるという．$\phi'(x,y)$ を x **における** y **方向への方向微分**と呼ぶ．各 $y\in$ V に対して，対応：$x\longmapsto\phi'(x,y)$ が W 値関数として連続であるとき，ϕ は D 上で**連続微分可能**であるという．

$\phi: D\longrightarrow$ W は連続微分可能であるとしよう．$\dim \mathsf{V}=n, \dim \mathsf{W}=m$ とし，$E=\{e_i\}_{i=1}^n, F=\{f_j\}_{j=1}^m$ を，それぞれ V, W の基底とする．このとき，$x=\sum_{i=1}^n x^i e_i, \phi(x)=\sum_{j=1}^m \phi^j(x)f_j$ と展開する．定義から

$$\phi'(x,y)=\sum_{j=1}^m\left(\frac{d}{dt}\phi^j\left(\sum_{i=1}^n(x^i+ty^i)e_i\right)\Big|_{t=0}\right)f_j$$

と書けるので合成関数の微分法により

$$\phi'(x,y) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi^j(x)}{\partial x^i}y^i f_j.$$

そこで，線形作用素 $\phi'(x):\mathsf{V}\longrightarrow\mathsf{W}$ を

$$\phi'(x)(y) := \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi^j(x)}{\partial x^i}y^i\right)f_j. \tag{D.18}$$

によって定義すれば

$$\phi'(x,y) = \phi'(x)(y), \quad x\in D, y\in\mathsf{V} \tag{D.19}$$

が成り立つ．左辺は基底の取り方によらないから，$\phi'(x)$ も基底の取り方によらない．$\phi'(x)$ を x における ϕ の**微分**と呼ぶ．写像 $\phi':D\longrightarrow\mathsf{L}(\mathsf{V},\mathsf{W});x\longmapsto\phi'(x)$ を ϕ の**導関数**という．

(D.18) によって，線形作用素 $\phi'(x)$ の基底 E,F に関する行列表示 $(\phi'(x)^j_i)$ について

$$\phi'(x)^j_i = \frac{\partial\phi^j(x)}{\partial x^i} \tag{D.20}$$

が成り立つ．すなわち，$(\phi'(x)^j_i)$ は $\mathbb{K}^m$ 値関数：$x\longmapsto(\phi^1(x),\cdots,\phi^m(x))$ の関数行列である．

写像 $\phi_*:D\times\mathsf{V}\longrightarrow\mathsf{W}\times\mathsf{W}$ を

$$\phi_*(x,v) := (\phi(x),\phi'(x)(v)), \quad (x,v)\in D\times\mathsf{V} \tag{D.21}$$

によって定義する．

付録 E

テンソル空間

E.1 定義

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間，V^* を V の双対空間とする．任意の $u_1, \cdots, u_p \in V$ ($p \in \mathbb{N}$) に対して，写像 $\overset{p}{\underset{i=1}{\otimes}} u_i : (V^*)^p$ (V^* の p 個の直積) $\longrightarrow \mathbb{K}$ を

$$\left(\overset{p}{\underset{i=1}{\otimes}} u_i\right)(\psi) := \prod_{i=1}^{p} \psi_i(u_i) = \psi_1(u_1)\cdots\psi_p(u_p), \quad \psi = (\psi_1, \cdots, \psi_p) \in (V^*)^p$$

によって定義し，$u_1, u_2, \cdots, u_p$ の**テンソル積**と呼ぶ．$\overset{p}{\underset{i=1}{\otimes}} u_i$ を $u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p$ のようにも記す．明らかに，$\overset{p}{\underset{i=1}{\otimes}} u_i \in \mathscr{M}((V^*)^p, \mathbb{K})$ (例 B.3 の $\mathscr{M}(X, V)$ で X, V がそれぞれ $(V^*)^p, \mathbb{K}$ の場合)．したがって，$\mathscr{M}((V^*)^p, \mathbb{K})$ の部分空間として $\overset{p}{\underset{i=1}{\otimes}} u_i, u_i \in V$ ($i = 1, \cdots, p$) によって生成される部分空間 — したがってそれはベクトル空間 —

$$\overset{p}{\otimes} V := \mathscr{L}\left(\left\{ \overset{p}{\underset{i=1}{\otimes}} u_i \,\middle|\, u_i \in V \ (i = 1, \cdots, p)\right\}\right) \tag{E.1}$$

が定義される．このベクトル空間を V の p **重テンソル積**と呼び，その元を p **階のテンソル**という．

定理 E.1 $\dim V = n < \infty$ とし，$\{e_i\}_{i=1}^n$ を V の任意の基底とする．このとき，$\{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \mid i_k = 1, \cdots, n \ (k = 1, \cdots, p)\}$ は $\overset{p}{\otimes} V$ の基底である．したがって，特に $\dim \overset{n}{\otimes} V = n^p$ である．

E.2 成分表示

n 次元ベクトル空間 V の中に基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ を 1 つとる．このとき定理 E.1 によって，任意の p 階テンソル $T \in \overset{p}{\otimes} V$ は

$$T = \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{n} T^{i_1 i_2 \cdots i_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \tag{E.2}$$

と展開できる ($T^{i_1\cdots i_p} \in \mathbb{K}$). 展開係数の組 $(T^{i_1\cdots i_p})_{i_1,\cdots,i_p}$ — その要素の個数は n^p 個 — をテンソル T の基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ に関する**成分表示**という.

E.3　対称テンソルと反対称テンソル

$\mathfrak{S}_p$ を $1,\cdots,p$ の置換 (i.e., $\{1,\cdots,p\}$ 上の全単射) の全体とする. 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ の符号を $\mathrm{sgn}(\sigma)$ で表す*1. $T \in \overset{p}{\otimes} \mathsf{V}$ とする.

(i) 任意の $\psi_i \in \mathsf{V}^*$ $(i=1,\cdots,p)$ と任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して

$$T(\psi_{\sigma(1)},\cdots\psi_{\sigma(p)}) = T(\psi_1,\cdots,\psi_p)$$

が成り立つとき, T は**対称** (symmetric) であるという. この型のテンソルを p **階対称テンソル**という. p 階対称テンソルの全体を $\underset{\mathrm{s}}{\overset{p}{\otimes}} \mathsf{V}$ で表す.

(ii) 任意の $\psi_i \in \mathsf{V}^*$ $(i=1,\cdots,p)$ と任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して

$$T(\psi_{\sigma(1)},\cdots\psi_{\sigma(p)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) T(\psi_1,\cdots,\psi_p)$$

が成り立つとき, T は**反対称** (anti-symmetric) であるという. この型のテンソルを p **階反対称テンソル**または p **階交代テンソル**という. p 階反対称テンソルの全体を $\overset{p}{\wedge} \mathsf{V}$ または $\underset{\mathrm{as}}{\overset{p}{\otimes}} \mathsf{V}$ で表す.

ベクトル $u_1,\cdots,u_p \in \mathsf{V}$ に対して

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_p := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(p)}$$

は反対称テンソルである. $\overset{p}{\underset{i=1}{\wedge}} u_i$ を $u_1,\cdots,u_p$ の**外積** (exterior product) と呼ぶ.

定理 E.2　$\{e_i\}_{i=1}^n$ を V の任意の基底とする. このとき, $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n\}$ は $\overset{p}{\wedge} \mathsf{V}$ の基底である.

例 E.3　任意の $u, v \in \mathsf{V}$ に対して

$$u \wedge v = u \otimes v - v \otimes u.$$

V の基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ に関する u, v の成分表示をそれぞれ, $(u^1,\cdots,u^n), (v^1,\cdots,v^n)$

---

*1 σ が偶置換ならば $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$, 奇置換ならば $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$.

とする：$u=\sum_{i=1}^{n} u^i e_i, v=\sum_{i=1}^{n} v^i e_i$．これらを上の式に代入し，反対称性 $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ を用いると，$u \wedge v = \sum_{i<j}^{n} (u^i v^j - u^j v^i) e_i \wedge e_j$ がわかる．したがって，$\overset{p}{\wedge}\mathsf{V}$ の基底 $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\}$ に関する $u \wedge v$ の成分表示を $((u \wedge v)^{ij})_{ij}$ とすれば

$$(u \wedge v)^{ij} = u^i v^j - u^j v^i$$

である．

E.4 テンソル空間の計量

V を n 次元計量ベクトル空間とするとき，V の p 重テンソル積 $\overset{p}{\otimes}\mathsf{V}$ の計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overset{p}{\otimes}\mathsf{V}}$ で

$$\left\langle \bigotimes_{i=1}^{p} u_i, \bigotimes_{i=1}^{p} v_i \right\rangle_{\overset{p}{\otimes}\mathsf{V}} = \prod_{i=1}^{p} \langle u_i, v_i \rangle_{\mathsf{V}}, \quad u_i, v_i \in \mathsf{V}\ (i=1, \cdots, p)$$

を満たすものがただ 1 つ存在することがわかる．この計量を $\overset{p}{\otimes}\mathsf{V}$ の**計量**と呼ぶ．対称テンソルの空間 $\overset{p}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}}\mathsf{V}$ と反対称テンソルの空間 $\overset{p}{\wedge}\mathsf{V}$ は $\overset{p}{\otimes}\mathsf{V}$ の部分空間として，同じ計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overset{p}{\otimes}\mathsf{V}}$ で計量ベクトル空間になる．

付録F

ヒルベルト空間論における基本的事項

ヒルベルト空間の定義については，すでに付録CのC.7節で述べた．この付録では，本書の第7章，第8章を理解する上で最小限必要な事項を採録する*1．以下,「ヒルベルト空間」といえば，複素ヒルベルト空間を表すものとする．

F.1　線形作用素

$\mathscr{H},\mathscr{K}$ をヒルベルト空間とし，$\mathscr{D}$ を $\mathscr{H}$ の部分空間とする (したがって $\mathscr{D}$ は複素ベクトル空間)．$\mathscr{D}$ から $\mathscr{K}$ への線形写像 $T:\mathscr{D}\longrightarrow\mathscr{K}$ を，$\mathscr{D}$ を**定義域** (domain) とする $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への**線形作用素**という．T の定義域を $D(T)$ と記す：$\mathscr{D}=D(T)$.

$\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への2つの線形作用素 S,T が等しいとは，$D(T)=D(S)$ かつすべての $\Psi\in D(T)(=D(S))$ に対して $T(\Psi)=S(\Psi)$ が成り立つときいう．この場合，$T=S$ と記す.

$\mathscr{K}=\mathscr{H}$ の場合，便宜上，T を $\mathscr{H}$ 上の線形作用素という (しかし，定義域 $D(T)$ は $\mathscr{H}$ 全体とは限らない).

例 F.1 $\mathbb{R}^d$ 上の複素数値ボレル可測関数 f で $\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2\,dx<\infty$ (積分はルベーグ積分) を満たすものの全体を $L^2(\mathbb{R}^d)$ とする．$f,g\in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}\in\mathbb{C}$ を $\langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}:=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)^*g(x)\,dx$ によって定義する．さらに，f, g が相等しいこと — $f=g$ と記す — を「ルベーグ測度に関してほとんどいたるところの点 $x\in\mathbb{R}^d$ に対して $f(x)=g(x)$ が成り立つこと」と定義する．このとき，

---

*1 くわしくは，拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) や新井朝雄・江沢洋『量子力学の数学的構造 I, II』(朝倉書店，1999) を参照.

$L^2(\mathbb{R}^d)$ は $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ を内積とするヒルベルト空間である.

$\mathbb{R}^d$ 上の関数 $f:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して $f(x)\neq 0$ となる点 x の全体の閉包

$$\mathrm{supp}\, f := \overline{\{x\in\mathbb{R}^d \mid f(x)\neq 0\}}$$

を f の**台** (support) という. $\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能な関数でその台が有界であるものの全体を $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ と記す：

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^d) := \{f\in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \mathrm{supp}\, f\subset \{x\in\mathbb{R}^d \mid |x|\le R\} \text{ となる } R>0 \text{ が存在 }\}.$$

ここで，$C^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能な関数の全体を表す. $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ の稠密な部分空間である*2.

各 $j=1,\cdots,d$ と $\alpha=1,2,\cdots$ に対して，写像 $\partial_j^\alpha : C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を

$$(\partial_j^\alpha f)(x) := \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x_j^\alpha}, \quad f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

によって定義できる. この写像は定義域を $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の線形作用素と見ることができる. この型の線形作用素を含む写像を**偏微分作用素**という.

例 F.2 F を $\mathbb{R}^d$ 上のボレル可測な複素数値関数とする. このとき，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の線形作用素 M_F を次のように定義できる：

$$D(M_F) := \left\{ f\in L^2(\mathbb{R}^d) \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^d} |F(x)|^2 |f(x)|^2\, dx < \infty \right\},$$

$$(M_F f)(x) := F(x) f(x), \quad f\in D(M_F).$$

作用素 M_F を関数 F による**掛け算作用素**という. 通常，誤解のおそれがない場合には，M_F を単に F と記す.

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ からヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ への 2 つの線形作用素 S,T の**和**は次のように定義される：

$$D(S+T) := D(S)\cap D(T),$$

$$(S+T)(\Psi) := S(\Psi) + T(\Psi), \quad \Psi\in D(S+T).$$

3 個以上の線形作用素 $T_1,\cdots,T_n$ の和については，$T_1+\cdots+T_n := (T_1+\cdots+T_{n-1})+T_n$ によって帰納的に定義する.

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の 2 つの線形作用素 T_1,T_2 に対して，**積** T_1T_2 を次のよう

---

*2 ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ の部分集合 $\mathscr{D}$ が $\mathscr{H}$ で**稠密** (dense) であるとは，任意の $\Psi\in\mathscr{H}$ に対して，$\mathscr{D}$ の点列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ ($\Psi_n\in\mathscr{D}$) で $\lim_{n\to\infty}\Psi_n=\Psi$ となるものが存在する場合をいう.

に定義する：

$$D(T_2T_1) := \{\Psi \in D(T_1) \,|\, T_1\Psi \in D(T_2)\},$$

$$(T_2T_1)\Psi := T_2(T_1\Psi).$$

3 個以上の線形作用素 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ の積については，$T_n \cdots T_1 := T_n(T_{n-1} \cdots T_1)$ によって帰納的に定義する．

T をヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ からヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ への線形作用素とする．定数 $C > 0$ が存在して

$$\|T\Psi\| \le C\|\Psi\|, \quad \Psi \in D(T)$$

が成り立つならば，T は**有界**であるという．この場合

$$\|T\| := \sup_{\Psi \neq 0, \Psi \in D(T)} \frac{\|T\Psi\|_{\mathscr{K}}}{\|\Psi\|_{\mathscr{H}}}$$

を T の**作用素ノルム**または単に**ノルム**と呼ぶ．

F.2　拡大と閉作用素

$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ をヒルベルト空間，T, S を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への線形作用素とする．もし，$D(T) \subset D(S)$ かつ $T\Psi = S\Psi$ $(\Psi \in D(T))$ が成り立つならば，S は T の**拡大**であるといい，このことを記号的に $T \subset S$ と表す．この場合，S を基準にして見る観点からは，T は S の $D(T)$ への**制限**であるいい，記号的に $T = S|D(T)$ と記す．

線形作用素 T が「$\Psi_n \in D(T)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $\lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi \in \mathscr{H}$ かつ $\lim_{n\to\infty} T\Psi_n = \Phi \in \mathscr{K}$ ならばつねに $\Psi \in D(T)$ かつ $T\Psi = \Phi$」という性質を有するとき，T は**閉**であるという．閉である線形作用素を**閉作用素**という．

線形作用素 T が，閉作用素の拡大 — **閉拡大**という — を持つとき，すなわち $T \subset \tilde{T}$ となる閉作用素 $\tilde{T}$ が存在するとき，T は**可閉**であるという．可閉な線形作用素を**可閉作用素**という．

定理 F.3　線形作用素 T が可閉であるとき，次の性質を満たす T の閉拡大 $\overline{T}$ が唯ひとつ存在する：

$$D(\overline{T}) = \left\{ \Psi \in \mathscr{H} \;\middle|\; \begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi \text{ かつ } \{T\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ がコーシー列} \\ \text{となる列 } \{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} (\Psi_n \in D(T)) \text{ が存在} \end{array} \right\},$$

$$\overline{T}\Psi = \lim_{n\to\infty} T\Psi_n.$$

この定理にいう作用素 $\overline{T}$ を T の**閉包**と呼ぶ．これは T の閉拡大のうち最小のものである (すなわち，T の任意の閉拡大 S に対して，$\overline{T}\subset S$)．

閉作用素 T に対して，部分空間 $D\subset D(T)$ があって T の D への制限 $T|D$ が可閉であり，$T=\overline{T|D}$ が成り立つとき，D を T の**芯** (core) という．

F.3 レゾルヴェントとスペクトル

$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間，T を $\mathscr{H}$ 上の線形作用素，λ を複素数とする．集合

$$\varrho(T):=\left\{\lambda\in\mathbb{C}\;\middle|\;\begin{array}{l}T-\lambda \text{ は単射, Ran}(T-\lambda) \text{ は } \mathscr{H} \text{ で稠密,}\\ (T-\lambda)^{-1} \text{ は有界}\end{array}\right\}$$

を T の**レゾルヴェント集合**という．この集合の補集合

$$\sigma(T):=\mathbb{C}\setminus\varrho(T)$$

を T の**スペクトル**と呼ぶ．容易にわかるように $\sigma_{\mathrm{p}}(T)\subset\sigma(T)$ である．

F.4 共役作用素

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ からヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ への線形作用素 T の定義域 $D(T)$ が $\mathscr{H}$ で稠密であるとき，T は**稠密に定義されている**という．

定理 F.4 T を稠密に定義された $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への線形作用素とする．このとき，次の性質を満たす ($\mathscr{K}$ から $\mathscr{H}$ への) 線形作用素 T^* が唯ひとつ存在する：

$$D(T^*)=\left\{\Phi\in\mathscr{K}\;\middle|\;\begin{array}{l}\text{あるベクトル } \eta_\Phi\in\mathscr{H} \text{ があって,}\\ \text{すべての } \Psi\in D(T) \text{ に対して}\\ \langle\eta_\Phi,\Psi\rangle_{\mathscr{H}}=\langle\Phi,T\Psi\rangle_{\mathscr{K}}\end{array}\right\},$$

$$T^*\Phi=\eta_\Phi,\quad \Phi\in D(T^*).$$

この定理にいう線形作用素 T^* を T の**共役作用素**という．共役作用素の定義から

$$\langle\Phi,T\Psi\rangle=\langle T^*\Phi,\Psi\rangle,\quad \Phi\in D(T^*),\Psi\in D(T)$$

が成り立つ．

注意 F.5 $D(T^*)$ は稠密であるとは限らない．$D(T^*)$ が稠密である場合には，T の **2 重共役** $T^{**}:=(T^*)^*$ が定義される．

$\mathscr{H}$ 全体を定義域に持つ任意の有界線形作用素 $B:\mathscr{H}\longrightarrow\mathscr{K}$ に対して，B^* は $\mathscr{K}$ 全体を定義域に持つ有界線形作用素であり，$B=B^{**}$ が成り立つ．

命題 F.6 稠密に定義された線形作用素の共役作用素は閉作用素である．

命題 F.7 $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への稠密に定義された線形作用素 T が可閉であるための必要十分条件は，$D(T^*)$ が $\mathscr{K}$ で稠密であることである．この場合，$\overline{T}=T^{**}$ が成り立つ．

F.5　対称作用素と自己共役作用素

定義 F.8 T をヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の線形作用素とする．

(i) $D(T)$ が稠密でありすべての $\Psi,\Phi\in D(T)$ に対して $\langle\Psi,T\Phi\rangle_{\mathscr{H}}=\langle T\Psi,\Phi\rangle_{\mathscr{H}}$ が成り立つとき，T は**対称**であるという．

(ii) $D(T)$ が稠密であり，$T=T^*$ が成り立つとき，T は**自己共役**であるという．

例 F.9 $\mathbb{R}^d$ 上の任意の実数値連続関数 F に対して，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の掛け算作用素 M_F は自己共役である．

いくつかの注意をしておこう：

(i) T が対称であることと「$D(T)$ は稠密かつ $T\subset T^*$」は同値である．

(ii) 線形作用素 T が対称であるための必要十分条件は，$D(T)$ が稠密であり，かつすべての $\Psi\in D(T)$ に対して $\langle\Psi,T\Psi\rangle_{\mathscr{H}}$ が実数となることである．

(iii) 自己共役作用素は対称作用素であるが，この逆は一般には成立しない．

(iii) との関連において，**量子力学の真正な認識にとって，自己共役作用素と対称作用素の峻別は本質的であることを強調しておく．**

定義 F.8 (ii) と命題 F.6 により，自己共役作用素は必ず閉である．

定理 F.10 自己共役作用素のスペクトルは $\mathbb{R}$ の閉部分集合である．

注意 F.11 自己共役でない閉対称作用素のスペクトルは，次のいずれかである：(i) $\mathbb{C}$, (ii) $\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}\,z\geq 0\}$ (上半平面の閉包), (iii) $\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}\,z\leq 0\}$ (下半平面の閉包)．

対称作用素 T について，実定数 γ が存在して $\langle\Psi,T\Psi\rangle_{\mathscr{H}}\geq\gamma\|\Psi\|^2_{\mathscr{H}},\Psi\in D(T)$ (左辺は上の注意 (ii) によって，つねに実数) が成り立つとき，T は**下に有界**であるといい，$T\geq\gamma$ と記す．特に $T\geq 0$ のとき，T は**非負**であるという．

定理 F.12 線形作用素 S が自己共役で $S \geq \gamma$ (γ は実定数) ならば $\sigma(S) \subset [\gamma, \infty)$.

対称作用素 T が自己共役作用素の拡大を持つとき，すなわち $T \subset \tilde{T}$ となる自己共役作用素 $\tilde{T}$ が存在するとき，$\tilde{T}$ を T の**自己共役拡大**という．

対称作用素 T について，T の閉包 $\overline{T}$ が自己共役であるとき，T は**本質的に自己共役**であるという．

命題 F.13 対称作用素 T が本質的に自己共役ならば，T は唯ひとつの自己共役拡大を持ち，それは $\overline{T}$ に等しい．

F.6 正射影定理と正射影作用素

$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間とし，$\mathscr{M}$ を $\mathscr{H}$ の閉部分空間 (部分空間で閉である部分集合) とする．このとき，任意の $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，ベクトル $\Psi_{\mathscr{M}} \in \mathscr{M}, \Psi_{\mathscr{M}^\perp}$ ($\mathscr{M}^\perp$ は $\mathscr{M}$ の直交補空間) がそれぞれ唯ひとつ存在し

$$\Psi = \Psi_{\mathscr{M}} + \Psi_{\mathscr{M}^\perp} \tag{F.1}$$

と表される (**正射影定理**)．この事実を用いて，写像 $U : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}^\perp$ (ヒルベルト空間の直和については付録 C, C.4 節を参照) を

$$U\Psi := (\Psi_{\mathscr{M}}, \Psi_{\mathscr{M}^\perp})$$

によって定義すれば，これはユニタリ作用素であることがわかる．したがって，$\mathscr{H}$ と $\mathscr{M} \oplus \mathscr{M}^\perp$ は同型である．この同型の意味で $\mathscr{H} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}^\perp$ と記す．この場合，ベクトル $(u, v) \in \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}^\perp$ は $u + v \in \mathscr{H}$ と同一視される (したがって，特に，$(u, 0), (0, v)$ はそれぞれ，u, v と同一視される)．

(F.1) によって，$\mathscr{H}$ 上の写像 $P_{\mathscr{M}}$ を

$$P_{\mathscr{M}}\Psi := \Psi_{\mathscr{M}} \tag{F.2}$$

によって定義できる．このとき，次の事実が証明される：

(i) $P_{\mathscr{M}}$ は線形かつ有界であり，$\|P_{\mathscr{M}}\| \leq 1$.

(ii) $P_{\mathscr{M}}$ は自己共役であり ($P_{\mathscr{M}}^* = P_{\mathscr{M}}$) かつ $P_{\mathscr{M}}^2 = P_{\mathscr{M}}$ (冪等性).

作用素 $P_{\mathscr{M}}$ を $\mathscr{M}$ **上への正射影作用素**と呼ぶ．

演習問題解答 (略解)

第1章

1. $n=2$ の場合，たとえば $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ とすれば $A,B\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ であり，$AB\neq BA$ がわかる ($AB=-BA$ が成り立つ)．$n\geq 3$ の場合には，たとえば $\widetilde{A}:=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix}, \widetilde{B}:=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix}$ を考えればよい．

2. 任意の $n,m\in\mathbb{Z}$ に対して $g^ng^m=g^{n+m}, (g^n)^{-1}=g^{-n}$ に注意すればよい．

3. 可換性により，任意の $g=g_1^{n_1}\cdots g_p^{n_p}, h=g_1^{m_1}\cdots g_p^{m_p}\in \mathsf{G}_{g_1,\cdots,g_p}$ に対して $gh=g_1^{n_1+m_1}\cdots g_p^{n_p+mp}\in\mathsf{G}_{g_1,\cdots,g_p}$．同様に $g^{-1}=g_1^{-n_1}\cdots g_p^{-n_p}\in\mathsf{G}_{g_1,\cdots,g_p}$．

4. (i) (†) の両辺の行列式をとると $|\det A|^2\det g=\det g$．$\det g=(-1)^q\neq 0$ であるから $|\det A|^2=1\neq 0$．したがって $\det A\neq 0$．ゆえに A は正則．(†) から $A^*(gAg^{-1})=I_n$．これは $(A^*)^{-1}=gAg^{-1}$ を意味する．したがって $(A^*)^{-1}gA^{-1}=g$．他方 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$．ゆえに $(A^{-1})^*gA^{-1}=g$．

(ii) $A,B\in\mathscr{A}(n,\mathbb{K})$ ならば，$(AB)^*g(AB)=B^*(A^*gA)B=B^*gB=g$．したがって $AB\in\mathscr{A}(n,\mathbb{K})$．また，(i) の式により $A^{-1}\in\mathscr{A}(n,\mathbb{K})$．

5. 任意の $x\in\mathsf{V}$ を $x=\sum_{i=1}^n x^ie_i$ と展開し ($x^i\in\mathbb{K}$)，写像 $T:\mathsf{V}\longrightarrow\mathsf{W}$ を $T(x):=\sum_{i=1}^n x^if_i$ によって定義する．このとき，T が線形であることは容易にわかる．$x\in\ker T$ とすれば，$T(x)=0$ であるから $\sum_{i=1}^n x^if_i=0$．したがって $x^i=0\ (i=1,\cdots,n)$．ゆえに $x=0$．よって T は単射である．これと V,W の有限次元性により，T は全射でもある．定義から，$Te_i=f_i\ (i=1,\cdots,n)$ は明らか．任意の $y=\sum_{i=1}^n y^ie_i\in\mathsf{V}$ に対して，$\langle Tx,Ty\rangle_{\mathsf{W}}=\sum_{i,j=1}^n (x^i)^*y^j\langle f_i,f_j\rangle_{\mathsf{W}}=\sum_{i,j=1}^n (x^i)^*y^j\langle e_i,e_j\rangle_{\mathsf{V}}$ (仮定による) $=\langle x,y\rangle_{\mathsf{V}}$．$T$ の一意性を示すのは容易であろう (線形作用素の一意性定理[*3]を使えば

[*3] たとえば，拙著『現代ベクトル解析の原理と応用』(共立出版，2006) の p.30, 命題 2.3 を参照．

ただちにわかる).

6. $\dim \mathsf{V} = n$ とする．まず $y = \alpha x$ の場合を考えると $|\alpha| = 1$ である．そこで U: $\mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{V}$ を $U(v) := \alpha v$ $(v \in \mathsf{V})$ によって定義すれば，これはユニタリ変換であり，明らかに $U(x) = y$ を満たす.

次に x, y が線形独立な場合を考え，$e_1 = x/\|x\|, f_1 = y/\|y\|$ とおく．有限次元内積空間におけるグラム–シュミットの直交化法により[*4]，ベクトル e_i, f_i $(i = 2, \cdots, n)$ で $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}, \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ が V の正規直交基底となるものがとれる．すると前問の定理を応用できて，V 上のユニタリ変換 U で $Ue_i = f_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ を満たすものが存在する．したがって，特に $i = 1$ の場合を考えると $Ux = y$ が得られる.

7. $x, y \in \mathsf{V} \setminus \{0\}$ を任意にとる．V に内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を導入して考える．このとき，前問と同様にして $T(x/\|x\|) = y/\|y\|$ となる計量同型写像 T が存在することがわかる．したがって，$y = (\|y\|/\|x\|)Tx$. そこで $G = D_{\|y\|/\|x\|}T$ とおけば (D_t は倍率 t の伸張変換)，$G \in \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ であり，$y = G(x)$ と書ける.

8. (単射性) $\rho(M) = \rho(N)$ $(M, N \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}))$ とすれば，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ に対して $\sum_{j=1}^{n} M_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} N_{ij} x_j$ $(i = 1, \cdots, n)$. 両辺を x_j で偏微分すれば $M_{ij} = N_{ij}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$. したがって $M = N$.

(全射性) 任意の $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ をとり，$B_{ij} = \langle \boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j \rangle_{\mathbb{K}^n}$ ($\{\boldsymbol{e}_i\}_i$ は $\mathbb{K}^n$ の標準基底) とすれば，$A = \hat{B}$ と書ける．$C := \langle \boldsymbol{e}_i, A^{-1}\boldsymbol{e}_j \rangle_{\mathbb{K}^n}$ とおけば，$(BC)_{ij} = \langle \boldsymbol{e}_i, AA^{-1}\boldsymbol{e}_j \rangle_{\mathbb{K}^n} = \delta_{ij}$ (クロネッカーのデルタ)．したがって，$BC = I_n$ であるから B は正則であり $B^{-1} = C$. ゆえに $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), \rho(B) = A$ であるので，ρ は全射である.

(準同型性) 任意の $M, N \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ と任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ に対して，$(\widehat{MN}\boldsymbol{x})_i = \sum_{j=1}^{n} (MN)_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{ik} N_{kj} x_j = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} (\hat{N}\boldsymbol{x})_k = (\hat{M}\hat{N}\boldsymbol{x})_i$. したがって $\widehat{MN} = \hat{M}\hat{N}$. これは ρ の準同型性を意味する.

9. $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$ とすれば，${}^{\mathrm{t}}TT = I_2$ により，$a^2 + c^2 = 1, b^2 + d^2 = 1$ かつ $ab + cd = 0 \cdots (*)$. また，$\det T = 1$ により，$ad - bc = 1 \cdots (**)$. そこで，$a = \cos\theta, c$

[*4] たとえば，拙著『現代ベクトル解析の原理と応用』(共立出版，2006) の p.109 を参照.

$=\sin\theta, b=\sin\alpha, d=\cos\alpha$ $(\alpha,\theta\in\mathbb{R})$ とおけば，$(*), (**)$ と 3 角関数に関する加法定理により，$\sin(\alpha+\theta)=0, \cos(\alpha+\theta)=1$. したがって，$\alpha+\theta=2n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$. ゆえに，$b=-\sin\theta, d=\cos\theta$.

10. $g_A(t+s)-g_A(t)=(e^{sA}-1)e^{tA}$ であるから，$\lim_{s\to 0}(e^{sA}-1)/s=A\cdots(*)$ を示せばよい．e^{sA} の定義から

$$B(s):=\frac{e^{sA}-1}{s}-A=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{A^k}{k!}s^{k-1}.$$

したがって

$$|B(s)_{ij}|\le\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n^kM_A^k}{k!}|s|^{k-1}=|s|\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(nM_A)^{\ell+2}}{(\ell+2)!}|s|^{\ell}$$

$$\le|s|(nM_A)^2e^{nM_A|s|}\longrightarrow 0,\quad s\longrightarrow 0.$$

したがって，$(*)$ が成立する．

第 2 章

1. $\{e_i\}_{i=1}^d$ を V の正規直交基底とし，$x\in\mathsf{V}$ を $x=\sum_{i=1}^d x^ie_i$ と展開するとき

$$(\mathrm{grad}\,V_{\mathrm{C}})(x)=\sum_{i=1}^d\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^d(x^j)^2\right)^{1/2}}e_i$$

$$=-\sum_{i=1}^d\frac{x^i}{\|x\|^3}e_i=-\frac{x}{\|x\|^3}.$$

2. $P=(P_j^i)$ を底変換：$\{e_i\}_i\longmapsto\{e_i'\}_i$ の行列とすれば，$e_i'=\sum_{j=1}^dP_i^je_j$. 座標変換の公式 (付録 B, B.1.2 項を参照) により $x^i=\sum_{j=1}^dP_j^ix^{j\prime}$ であるから，合成関数の微分法により

$$\partial_i'=\sum_{j=1}^d(\partial_i'x^j)\partial_j=\sum_{j=1}^dP_i^j\partial_j.$$

また $g'={}^{\mathrm{t}}PgP$ であるから，$(g')^{-1}=P^{-1}g^{-1\mathrm{t}}(P^{-1})$. したがって

$$\sum_{i,j=1}^dg'^{ij}\partial_i'\partial_j'=\sum_{i,j=1}^d\sum_{k,\ell=1}^d(P^{-1})_k^i(P^{-1})_\ell^jg^{k\ell}\sum_{m,n=1}^dP_i^mP_j^n\partial_m\partial_n$$

$$= \sum_{k,\ell,m,n=1}^{d} \delta_k^m \delta_\ell^n g^{k\ell} \partial_m \partial_n = \sum_{k,\ell=1}^{d} g^{k\ell} \partial_k \partial_\ell.$$

3. 問題 2 によって，正規直交基底 $\{e_i\}_{i=1}^d$ を用いて計算すれば十分である．この場合 $\|x\|^\alpha = \left(\sum_{i=1}^d (x^i)^2\right)^{\alpha/2}$．したがって

$$\partial_i \phi_\alpha(x) = -\alpha x^i \phi_{\alpha+2}(x).$$

ゆえに

$$\partial_i^2 \phi_\alpha(x) = -\alpha \phi_{\alpha+2}(x) + \alpha(\alpha+2)(x^i)^2 \phi_{\alpha+4}.$$

両辺を，i について 1 から d まで加えると

$$\Delta \phi_\alpha(x) = [-\alpha d + \alpha(\alpha+2)] \phi_{\alpha+2}(x).$$

したがって，$\Delta \phi_\alpha = 0 \Longleftrightarrow d = \alpha + 2$.

4. エネルギー保存則により，定数 E があって $T(\dot{X}(t)) + V(X(t)) = E$ $(\forall t \in \mathbb{R})$. $T(v) \geq 0$ であるから $E \geq V(X(t)) \geq a\|X(t)\|^p - b$. したがって $\|X(t)\|^p \leq (b + E)/a$. ゆえに $\|X(t)\| \leq [(b+E)/a]^{1/p}$. これは $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|X(t)\| \leq [(b+E)/a]^{1/p} < \infty$ を意味する．

5. g_v が全単射な写像であることは容易に確かめられる．$A = (t,x), B = (t,y) \in \mathscr{E}_t$ ならば，$g_v(A), g_v(B) \in \mathscr{E}_t$ は定義から明らか．さらに $\rho(g_v(A), g_v(B)) = \|x + vt - (y + vt)\| = \|x - y\| = \rho(A,B)$. 時間間隔の保存性も容易に示される．

6. $g_{s,y}(X) = X + (s,y)$. したがって $g_{s,y}$ はアファイン性を持つ．同時事象間の距離の保存性，時間間隔の保存性も容易に示される．

7. g_G は V_{N} 上の線形写像である．$g_G(X) = 0$ とすれば，$t = 0, Gx = 0$. したがって，$x = 0$. ゆえに $X = 0$. よって，g_G は単射である．これと V_{N} の有限次元性により，g_G は全単射．ゆえに g_G は V_{N} 上の同型写像である．$A = (t,x), B = (t,y) \in \mathscr{E}_t$ ならば $\rho(g_G(A), g_G(B)) = \|Gx - Gy\| = \|x - y\| = \rho(A,B)$. 時間間隔の保存性は明らかであろう．

8. (i) ベクトル空間に関する次元定理により[*5] $d + 1 = \dim\ker T + \dim T(\mathsf{V})$. いま，$\dim T(\mathsf{V}) = \dim \mathbb{R} = 1$ であるから $\dim\ker T = d$.

[*5] たとえば，拙著『現代ベクトル解析の原理と応用』(共立出版，2006) の p.34，定理 2.10 を参照．

(ii) $Q, R \in \mathscr{B}_P$ とすれば，$T(P-Q)=0, T(P-R)=0$. したがって，$T(Q-R)=T((Q-P)+(P-R))=T(Q-P)+T(P-R)=0$. ゆえに $Q-R\in\ker T$. また，任意の $x\in\ker T$ に対して，$P-(Q+x)=(P-Q)-x\in\ker T$. 以上から，題意がしたがう.

(iii) 任意の $x\in\ker T$ に対して，$(Q+x)-(R+x)=Q-R$ を使えばよい.

(iv) G_1, G_2 がガリレイ変換ならば，G_1G_2 はアファイン変換であり

$$T((G_1G_2)(P)-(G_1G_2)(Q))=T(G_2(P)-G_2(Q))=T(P-Q).$$

また，$\rho((G_1G_2)(P),(G_1G_2)(Q))=\rho(G_2(P),G_2(Q))=\rho(P,Q)$. したがって G_1G_2 はガリレイ変換である. G がガリレイ変換であるとき，G^{-1} がガリレイ変換であることを示すには，$GG^{-1}=I$ に注意すればよい. 実際，

$$T(G^{-1}(P)-G^{-1}(Q))=T(G(G^{-1}(P)),G(G^{-1}(Q))=T(P-Q).$$

同時事象の間の距離の保存性についても同様.

(v) 写像 $A:\mathscr{B}_P \longrightarrow E_{t_P}$ を

$$A(X):=a+(X-P)$$

によって定義する. ただし $a:=P-O$. これは全単射である ($\because$ $A(X)=A(Y)$ ならば $(X-P)=(Y-P)$. したがって $X=Y$. ゆえに A は単射. また任意の $u\in E_{t_P}$ に対して $X_u=O+u$ とおけば $A(X_u)=a+(X_u-P)=a-(P-O)+u=u$. したがって A は全射). 任意の $u\in\ker T$ に対して

$$A(X+u)=a+(X-P)+u=A(X)+u.$$

以上から，A はアファイン変換である.

(vi) $E_t\cap E_s\neq\varnothing$ とし $u\in E_t\cap E_s$ とすれば，$T(u)=t, T(u)=s$. したがって，$s=t$. だが，これは矛盾である.

(vii) 任意の $u\in V$ に対して $T(u)\in\mathbb{R}$ であるから，$u\in E_{T(u)}$. したがって，$V\subset\bigcup_{t\in\mathbb{R}} E_t$. 逆の包含関係は自明.

(viii) $V=\ker T\oplus(\ker T)^\perp$ と直交分解できる ($(\ker T)^\perp$ は $\ker T$ の直交補空間). 同型定理により，$\ker T$ から V_d への直交変換 T_0 が存在する. 写像 $T_1:(\ker T)^\perp\longrightarrow\mathbb{R}$ を $T_1(v):=T(v)$ $(v\in(\ker T)^\perp)$ によって定義し，写像 $S:V\longrightarrow\mathbb{R}\oplus V_{\mathrm{d}}$ を $S(u):=(T_1(u_1),T_0(u_0))$ によって定義する. ただし，$u=u_0+u_1$ $(u_0\in\ker T, u_1\in(\ker T)^\perp)$. S が線形であることは容易にわかる. S が単射であること，したがって，全単射であることも容易に示される. もし $u\in E_t$ ならば $T_1(u_1)=t$

であるから，$S(u)\in\{(t,x)\,|\,x\in V_d\}$．逆に，任意の $x\in V_d$ に対して $u=T_0^{-1}(x)+T_1^{-1}(t)$ とすれば $u\in E_t$ であり，$S(u)=(t,x)$．したがって，$S(E_t)=\{(t,x)\,|\,x\in V_d\}$．

第3章

1. エネルギー保存則により，定数 E があって $H(Z(t))=E$ が成り立つ．$Z(t)=(X(t),P(t))\in D\times\mathsf{V}^*$ とすれば，$\|Z(t)\|=\sqrt{\|X(t)\|^2+\|P(t)\|^2}\le\|X(t)\|+\|P(t)\|$．仮定により $E\ge a(\|X(t)\|+\|P(t)\|)^q-b$．したがって $\|Z(t)\|\le[(E+b)/a]^{1/q}$．ゆえに $\sup_{t\in\mathbb{I}}\|Z(t)\|<\infty$．

2. (i) s を固定し，$Z_1(t)=g_{t+s}(x,p), Z_2(t)=(g_tg_s)(x,p)=g_t(g_s(x,p))$ とおく．このとき

$$\dot{Z}_1(t)=\frac{dg_{t'}(x,p)}{dt'}\bigg|_{t'=t+s}=J_{\mathsf{V}}((dH)(g_{t'}(x,p)))\bigg|_{t'=t+s}=J_{\mathsf{V}}((dH)(Z_1(t))).$$

したがって，Z_1 はハミルトン方程式の解であり，初期条件は $Z_1(0)=g_s(x,p)$ である．他方 $\dot{Z}_2(t)=J_{\mathsf{V}}((dH)(Z_2(t)))$ は明らかであり，$Z_2(0)=g_s(x,p)$．したがって，Z_1 と Z_2 の初期条件は一致するので，解の一意性により $Z_1=Z_2$．ゆえに $g_{t+s}(x,p)=(g_tg_s)(x,p)$．$(x,p)$ は任意であったから，$g_{t+s}=g_tg_s$．

(ii) (i) より，$I=g_0=g_{-t}g_t=g_tg_{-t}$ であるから g_t は全単射であり，$g_t^{-1}=g_{-t}\cdots(*)$．したがって g_t は $\mathsf{V}\oplus\mathsf{V}^*$ 上の変換である．(i) により，T_H は積に関して閉じていることがわかる．また，$(*)$ により $g_t^{-1}\in\mathsf{T}_H$．ゆえに，T_H は変換群である．

(iii) 仮に $Z_{(x,p)}(t_0)=Z_{(x',p')}(t_0)$ となる $t_0\in\mathbb{R}$ があったとしよう．このとき $g_{t_0}(x,p)=g_{t_0}(x',p')$．左から $g_{t_0}^{-1}$ を作用させれば，$(x,p)=(x',p')$ となる．しかし，これは矛盾である．

3. (i) $f_{(x,p)}(t):=F(g_t(x,p))$ とおく．$\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ とし，$g_{t+\varepsilon}=g_\varepsilon g_t$ を用いると

$$\frac{f_{(x,p)}(t+\varepsilon)-f_{(x,p)}(t)}{\varepsilon}=\frac{f_{g_t(x,p)}(\varepsilon)-f_{g_t(x,p)}(0)}{\varepsilon}$$

$$\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f'_{g_t(x,p)}(0)=\{F,H\}(g_t(x,p)).$$

したがって $dF(g_t(x,p))/dt=\{F,H\}(g_t(x,p))$．

(ii) 仮定と (i) により $dF(g_t(x,p))/dt=0$ であるから，$F(g_t(x,p))=c(x,p)$ (t に

よらない定数). $Z(t)=g_t(x,p)$ はハミルトン方程式の解であるから，F はハミルトン方程式の保存量である.

(iii) $h(t)=g_t(x,p)$ とおくと

$$h(t)=h(0)+h'(0)t+o(t),\quad t\longrightarrow 0.$$

$h(0)=(x,p)$ であり，ハミルトン方程式により $h'(0)=J_{\mathsf{V}}((dH)(x,p))$. ゆえに題意が成立する.

4. (i) 前問 (iii) により

$$\begin{aligned}F(g_t(x,p))&=F((x,p)+J_{\mathsf{V}}((dH)(x,p))t+o(t))\\&=F(x,p)+(dF)(x,p)(J_{\mathsf{V}}((dH)(x,p)))t+o(t).\end{aligned}$$

したがって

$$\left.\frac{dF(g_t(x,p))}{dt}\right|_{t=0}=(dF)(x,p)(J_{\mathsf{V}}((dH)(x,p))).$$

(ii) $u=J_{\mathsf{V}}((dH)(x,p))$ とおくと

$$(dF)(x,p)(u)=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial F}{\partial x^i}u^i+\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial F}{\partial p_i}u^{i+d}.$$

一方

$$u^i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad i=1,\cdots,d,$$

$$u^{i+d}=-\frac{\partial H}{\partial x^i},\quad i=1,\cdots,d.$$

したがって，求める結果が得られる.

(iii) 反対称性は (ii) の表示からただちにわかる．線形性は定義による．ヤコビ恒等式は，(ii) の表示を用いた直接計算からでる.

(iv) $Z(t)$ を H から定まるハミルトン方程式の解とすれば，仮定により $\{F,H\}(Z(t))=dF(Z(t))/dt=0$. 同様に $\{G,H\}(Z(t))=0$. 問題 2 により，任意の点 $(x,p)\in\mathsf{V}\times\mathsf{V}^*$ に対して $Z(0)=(x,p)$ となる解 $Z(t)$ があるから，写像の等式 $\{F,H\}=0,\{G,H\}=0$ が得られる．したがって，ヤコビ恒等式により $\{\{F,G\},H\}=0$. これは $d\{F,G\}(Z(t))/dt=0$ を意味するから，$\{F,G\}$ は保存量である.

第 4 章

1. (i) $L(\chi)$ がローレンツ行列であることは，${}^tL(\chi)\eta L(\chi)$ を直接計算し，これ

が η に等しいことを示せばよい．その際，公式 $(\cosh\chi)^2-(\sinh\chi)^2=1$ を用いる．また．$\det L(\chi)=1, L(\chi)^0_0=\cosh\chi\geq 1$ も容易にわかる．

(ii) 双曲線関数に関する加法定理 $\cosh(\chi+\theta)=\cosh\chi\cosh\theta+\sinh\chi\sinh\theta$, $\sinh(\chi+\theta)=\sinh(\chi)\cosh\theta+\cosh\chi\sinh\theta$ を用いればよい．

2. これも直接計算 (${}^tTT=I_d$ に注意).

3. 微分方程式の部分からは，$X(\tau)=X_0+v_0\tau\cdots(*)$ となる ($X_0, v_0\in V_{\mathrm{M}}$ は任意のベクトル)．したがって，$\dot{X}(\tau)=v_0$．運動方程式の第 2 式が満たされるための必要十分条件は，$\langle v_0,v_0\rangle=c^2\cdots(**)$ である．よって，一般解は，$(**)$ を満たす v_0 を用いて，$(*)$ で与えられる．

4. $\beta=\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ とおく．任意の $x,y\in V_{\mathrm{M}}$ に対して

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_v(x),\Lambda_v(y)\rangle &=\beta^2\left\{\left(x^0+\frac{v}{c}x^1\right)\left(y^0+\frac{v}{c}y^1\right)-\left(x^1+\frac{v}{c}x^0\right)\left(y^1+\frac{v}{c}y^0\right)\right\}\\ &\quad-\sum_{i=2}^d x^iy^i\\ &=x^0y^0-x^1y^1-\sum_{i=2}^d x^iy^i=\langle x,y\rangle.\end{aligned}$$

5. $X(\tau)=\sum_{\mu=0}^d X^\mu(\tau)e_\mu$ と展開し，微分方程式を成分ごとに書けば

$$m\frac{d^2X^\mu(\tau)}{d\tau^2}=-kX^\mu(\tau). \tag{$*$}$$

2 つの場合に分けて考える．

(1) $k>0$ の場合．この場合，$\omega:=\sqrt{k/m}$ とおけば，よく知られているように $X^\mu(\tau)=A^\mu\cos\omega\tau+B^\mu\sin\omega\tau$ が $(*)$ の一般解である．ただし，A^μ, B^μ は任意の実定数である．そこで $A=\sum_{\mu=0}^d A^\mu e_\mu, B=\sum_{\mu=0}^d B^\mu e_\mu$ とおけば，$A,B\in V_{\mathrm{M}}$ であり，$X(\tau)=(\cos\omega\tau)A+(\sin\omega\tau)B$．したがって，$\dot{X}(\tau)=\omega\{-(\sin\omega\tau)A+(\cos\omega\tau)B\}$ であるから

$$\begin{aligned}&\langle\dot{X}(\tau),\dot{X}(\tau)\rangle\\ &=\omega^2\{\langle A,A\rangle\sin^2\omega\tau+\langle B,B\rangle\cos^2\omega\tau-2\langle A,B\rangle\sin\omega\tau\cos\omega\tau\}.\end{aligned}$$

これが τ によらず，c^2 に等しいための必要十分条件は，$\langle A,A\rangle=\langle B,B\rangle=c^2/\omega^2, \langle A,B\rangle=0$ であることがわかる．よって，求める一般解は

$$X(\tau)=(\cos\omega\tau)A+(\sin\omega\tau)B.$$

ただし，$\langle A,A\rangle=\langle B,B\rangle=c^2/\omega^2, \langle A,B\rangle=0$. だが，逆シュヴァルツの不等式により，このようなベクトル A,B は存在しない．ゆえに，$k>0$ の場合，解は存在しない．

(2) $k<0$ の場合．この場合 $\nu:=\sqrt{|k|/m}$ とおく．このとき微分方程式は $d^2X^\mu(\tau)/d\tau^2=\nu^2X^\mu(\tau)$. この方程式の一般解は

$$X^\mu(\tau)=C^\mu e^{\nu\tau}+D^\mu e^{-\nu\tau}.$$

ただし，C^μ, D^μ は実定数である．そこで，$C:=\sum_{\mu=0}^{d}C^\mu e_\mu, D=\sum_{\mu=0}^{d}D^\mu e_\mu$ とすれば，$X(\tau)=e^{\nu\tau}C+e^{-\nu\tau}D$. したがって，$\dot{X}(\tau)=\nu(e^{\nu\tau}C-e^{-\nu\tau}D)$ であるから

$$\langle\dot{X}(\tau),\dot{X}(\tau)\rangle=\nu^2\{\langle C,C\rangle e^{2\nu\tau}+\langle D,D\rangle e^{-2\nu\tau}-2\langle C,D\rangle\}.$$

これが τ によらず，c^2 に等しいための必要十分条件は $\langle C,C\rangle=\langle D,D\rangle=0$, $-2\nu^2\langle C,D\rangle=c^2$ である．ゆえに，求める一般解は

$$X(\tau)=e^{\nu\tau}C+e^{-\nu\tau}D.$$

ただし，$\langle C,C\rangle=\langle D,D\rangle=0, \langle C,D\rangle=-c^2/(2\nu^2)$.

第5章

1. $g'_{\mu\nu}:=\langle e'_\mu,e'_\nu\rangle$ とし，$g'=(g'_{\mu\nu})$ とする．$g'_{\mu\nu}=\sum_{\alpha,\beta=0}^{d}L_\mu^\alpha L_\nu^\beta g_{\alpha\beta}$ であるから，$g'={}^{\mathrm{t}}LgL$. したがって，$g'^{-1}=L^{-1}g^{-1\mathrm{t}}(L^{-1})$. したがって，$g^{\mu\nu\prime}:=(g'^{-1})^{\mu\nu}$ とすれば

$$g^{\mu\nu\prime}=\sum_{\alpha,\beta=0}^{d}(L^{-1})^\mu_\alpha g^{\alpha\beta}(L^{-1})^\nu_\beta.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\nu=0}^{d}g^{\mu\nu\prime}\partial'_\mu\partial'_\nu&=\sum_{\mu,\nu=0}^{d}\sum_{\alpha,\beta=0}^{d}(L^{-1})^\mu_\alpha g^{\alpha\beta}(L^{-1})^\nu_\beta\sum_{\lambda,\rho=0}^{d}L_\mu^\lambda L_\nu^\rho\partial_\lambda\partial_\rho\\&=\sum_{\alpha,\beta=0}^{d}\sum_{\lambda,\rho=0}^{d}\delta_\alpha^\lambda\delta_\beta^\rho g^{\alpha\beta}\partial_\lambda\partial_\rho\\&=\sum_{\alpha,\beta=0}^{d}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta.\end{aligned}$$

よって，題意が成立する．

2. $B(x)=a\cos\langle k,x\rangle, C(x)=b\sin\langle k,x\rangle$ とおき，B,C それぞれが自由な電磁ポテンシャルであることを示す．$\{e_\mu\}_\mu$ をローレンツ基底とし，その双対基底を $\{\phi^\mu\}_{\mu=0}^d$ とする．このとき

$$x=\sum_{\mu=0}^d x^\mu e_\mu,\quad a=\sum_{\mu=0}^d a_\mu \phi^\mu,$$

$$b=\sum_{\mu=0}^d b_\mu \phi^\mu,\quad k=\sum_{\mu=0}^d k^\mu e_\mu,$$

$$B(x)=\sum_{\mu=0}^d B_\mu(x)\phi^\mu,\quad C(x)=\sum_{\mu=0}^d C_\mu(x)\phi^\mu$$

と展開でき

$$B_\mu(x):=a_\mu\cos\left(\sum_{\nu=0}^d k_\nu x^\nu\right).$$

と書ける．ただし $k_\nu=\sum_{\lambda=0}^d \eta_{\nu\lambda}k^\lambda$．したがって $\partial_\alpha B_\mu(x)=-k_\alpha a_\mu\sin\langle k,x\rangle$．ゆえに $\mathrm{Div}\,B(x)=-\sum_{\alpha=0}^d k^\alpha a_\alpha\sin\langle k,x\rangle=-a(k)\sin\langle k,x\rangle=0$．また，$\partial_\beta\partial_\alpha B_\mu(x)=-k_\beta k_\alpha B_\mu(x)$．したがって $\Box B_\mu(x)=-\langle k,k\rangle B_\mu(x)=0$．よって，$B$ は自由な電磁ポテンシャルである．同様にして，C も自由な電磁ポテンシャルであることがわかる．

3. 任意のゲージ関数 Λ_1,Λ_2 に対して

$$\begin{aligned}(G_{\Lambda_1}G_{\Lambda_2})(A)&=G_{\Lambda_2}(A)-d\Lambda_1=A-d\Lambda_2-d\Lambda_1\\&=A-d(\Lambda_2+\Lambda_1)=G_{\Lambda_1+\Lambda_2}(A),\quad \forall A\in A^1(V_{\mathrm{M}}).\end{aligned}$$

したがって $G_{\Lambda_1}G_{\Lambda_2}=G_{\Lambda_1+\Lambda_2}\in\Gamma\cdots(*)$．これはまた $G_\Lambda G_{-\Lambda}=G_{-\Lambda}G_\Lambda=I$ を導くから，G_Λ は全単射であり，$G_\Lambda^{-1}=G_{-\Lambda}\in\Gamma$ がわかる．ゆえに Γ は群である．$(*)$ より，$G_{\Lambda_1}G_{\Lambda_2}=G_{\Lambda_2}G_{\Lambda_1}$ がしたがうから，Γ は可換群である．

4. $A,B\in\mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}^0$ ならば

$$\Box A-d(\mathrm{Div}A)=0,\quad \Box B-d(\mathrm{Div}B)=0.$$

これらの式の各辺を加えれば，$\Box(A+B)-d(\mathrm{Div}(A+B))=0$．したがって，$A+B\in\mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}^0$．同様にして，任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して $\alpha A\in\mathfrak{S}_{\mathrm{EM}}^0$ がわかる．

5. (i) $\langle k,k\rangle = |\boldsymbol{k}|^2 - \sum_{j=1}^{d} k_j^2 = 0$.

(ii) $k_0 = |\boldsymbol{k}|$ とおくと，$a_0(\boldsymbol{k})k_0 - \sum_{j=1}^{d} a_j(k)k_j = 0$. これから $\sum_{\mu=0}^{d} \partial^\mu a_\mu^{(\boldsymbol{k})}(x) = 0$ が出る．また，$\left(\partial_0^2 - \sum_{j=1}^{d} \partial_j^2\right) a_\mu^{(\boldsymbol{k})}(x) = -\langle k,k\rangle A_\mu^{(\boldsymbol{k})}(x) = 0$. 以上から題意が成立する．

(iii) 条件のもとで微分と積分が交換できることを確かめ，(ii) の結果を用いればよい．

(iv) (iii) からしたがう．

第6章

1. $\phi_1(x) := [\phi(x)+\phi(x)^*]/2, \phi_2(x) := [\phi(x)-\phi(x)^*]/(2i) \cdots (*)$ とすれば，$\phi_1(x)$, $\phi_2(x) \in \mathbb{R}$ $(\forall x \in V_{\mathrm{M}})$ であるから，対応 $\phi_j : x \longmapsto \phi_j(x)\,(j=1,2)$ は V_{M} 上の実スカラー場である．$(*)$ から，$\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$ が出る．一意性を示すために，別に実スカラー場 ψ_j $(j=1,2)$ があって，$\phi(x) = \psi_1(x) + i\psi_2(x)$ $(x \in V_{\mathrm{M}})$ が成り立つとする．このとき，$\phi(x)^* = \psi_1(x) - i\psi_2(x)$ であるから，$\psi_1(x) = [\phi(x) + \phi(x)^*]/2 = \phi_1(x), \psi_2(x) = [\phi(x) - \phi(x)^*]/(2i) = \phi_2(x)$.

2. 与式の共役をとれば，$\Box\phi(x)^* + M^2\phi(x)^* = F(\phi(x),\phi(x)^*)^* \cdots (*)$. この式の各辺と与式の各辺を加えて 2 で割れば

$$\Box\phi_1(x) + M^2\phi_1(x) = \frac{F(\phi(x),\phi(x)^*) + F(\phi(x),\phi(x)^*)^*}{2}$$
$$= F_1(\phi_1(x),\phi_2(x)).$$

ϕ_2 に対する方程式は，与式の各辺と $(*)$ の各辺を引いて $2i$ で割ることにより得られる．

3.

$$f(\boldsymbol{k}) := c(\sqrt{\hbar}/\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})})\left\{a_+(\boldsymbol{k})e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t} + a_-(-\boldsymbol{k})^* e^{i\omega(\boldsymbol{k})t}\right\},$$

$$g(\boldsymbol{k}) := -i\sqrt{\hbar\omega(\boldsymbol{k})/2}\left\{a_+(\boldsymbol{k})e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t} - a_-(-\boldsymbol{k})^* e^{i\omega(\boldsymbol{k})t}\right\}$$

とおけば，$\check{f}(\boldsymbol{x}) = \phi_{\mathrm{free}}(x), \check{g}(\boldsymbol{x}) = \partial^0\phi_{\mathrm{free}}(x)$. したがって，公式 (†) により

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi_{\mathrm{free}}(x)^* \partial^0 \phi_{\mathrm{free}}(x)\, d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{k})^* g(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k}.$$

したがって

$$Q = i\int_{\mathbb{R}^d} (f(\boldsymbol{k})^* g(\boldsymbol{k}) - f(\boldsymbol{k}) g(\boldsymbol{k})^*)\, d\boldsymbol{k}.$$

右辺を具体的に計算すれば，$(\star)$ が得られる．

$h_j(\boldsymbol{k}) = ic(k^j\sqrt{\hbar}/\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})})\{a_+(\boldsymbol{k})e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t} + a_-(-\boldsymbol{k})^* e^{i\omega(\boldsymbol{k})t}\}$ とおくと，$\check{h}_j(\boldsymbol{x}) = \partial_j \phi_{\mathrm{free}}(x)$．したがって

$$P_0 = \int_{\mathbb{R}^d} \{|g(\boldsymbol{k})|^2 + \sum_{j=1}^d |h_j(\boldsymbol{k})|^2 + M^2 |f(\boldsymbol{k})|^2\}\, d\boldsymbol{k}.$$

右辺を具体的に計算すれば，$(\star\star)$ が得られる．

同様に

$$P_j = \int_{\mathbb{R}^d} g(\boldsymbol{k})^* h_j(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k} + (\text{複素共役})$$

であり，右辺を計算すれば $(\star\star\star)$ が得られる ($k_j = -k^j$ に注意)．

4. $\partial \mathscr{L}_{\mathrm{EM}}(x)/\partial(\partial_\mu A_\nu(x)) = -F^{\mu\nu}(x), \partial\mathscr{L}_{\mathrm{EM}}(x)/\partial A_\nu(x) = -J^\nu(x)$ による．

第7章

1. $\Psi' = \alpha\Psi, \Phi' = \beta\Phi$ を満たす定数 $\alpha, \beta \neq 0$ があるので，$\hat{\Psi}' = (\alpha/|\alpha|)\hat{\Psi}, \hat{\Phi}' = (\beta/|\beta|)\Phi$．したがって，$|\langle\hat{\Phi}', \hat{\Psi}'\rangle| = |(\alpha/|\alpha|)||(\beta/|\beta|)||\langle\hat{\Psi}, \hat{\Phi}\rangle| = |\langle\hat{\Phi}, \hat{\Psi}\rangle|$．

2. F がユニタリまたは反ユニタリならば，任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ に対して，$\|F\Psi\| = \|\Psi\|, \|F\Phi\| = \|\Phi\|, |\langle F\Psi, F\Phi\rangle| = |\langle\Psi, \Phi\rangle|$．これらを用いると

$$P(\hat{F}[\Psi], \hat{F}[\Phi]) = \left|\left\langle \frac{F\Psi}{\|F\Psi\|}, \frac{F\Phi}{\|F\Phi\|}\right\rangle\right|^2 = |\langle\hat{\Psi}, \hat{\Phi}\rangle|^2 = P([\Psi], [\Phi]).$$

3. $\sum_{j=1}^n a_j X_j + \sum_{j=1}^n b_j Y_j + cZ = 0$ とする ($a_j, b_j, c \in \mathbb{C}$)．これと X_k とのリー括弧積をとると $b_k iZ = 0$．したがって $b_k = 0$．また，Y_k とのリー括弧積をとれば $-ia_k Z = 0$．したがって $a_k = 0$．ゆえに $cZ = 0$．したがって $c = 0$．

4. $e^{zA} = \sum_{n=0}^\infty z^n A^n/n!$．右辺の和を偶数冪の部分と奇数冪の部分に分けて計算し $A^{2n} = I_n$ を用いると，$e^{zA} = \sum_{n=0}^\infty z^{2n} I_n/(2n)! + \sum_{n=0}^\infty z^{2n+1} A/(2n+1)! = (\cosh z) I_n + (\sinh z)A$．

5. $\sum_{j=1}^3 a_j A_j = 0$ とする ($a_j \in \mathbb{C}$)．この式と A_1 との交換関係をとると $a_2\mu_3 A_3 -$

$a_3\mu_2A_2=0$. この式と A_2 との交換関係をとると $a_2\mu_3\mu_1A_1=0$. したがって $a_2=0$. そこでもとの式にもどると，$a_1A_1+a_3A_3=0$. この式と A_3 との交換関係をとると，$a_1\mu_2A_2=0$. したがって $a_1=0$. したがって，また，$a_3A_3=0$. これは $a_3=0$ を意味する．以上から，$a_j=0$ $(j=1,2,3)$ が示せたので題意が成立する．

6. $\Psi\in\mathscr{H}_{\rm sym}\cap\mathscr{H}_{\rm as}$ とすれば，すべての $\sigma\in\mathfrak{S}_N$ に対して，$P_\sigma\Psi=\Psi, P_\sigma\Psi=\mathrm{sgn}(\sigma)\Psi$. したがって，$\Psi=\mathrm{sgn}(\sigma)\Psi$. $N\geq 2$ であるから，たとえば $\sigma=(1,2)$ (1 と 2 の互換) とすれば，$\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$. したがって $\Psi=0$.

7. $\langle P_\sigma\psi,P_\sigma\phi\rangle=\displaystyle\int_{(\mathbb{R}^3)^N}\psi(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)},\cdots,\boldsymbol{x}_{\sigma(N)})^*\phi(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)},\cdots,\boldsymbol{x}_{\sigma(N)})\,d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_N$. そこで，変数変換 $\boldsymbol{y}_j:=\boldsymbol{x}_{\sigma(j)}$ $(j=1,2\cdots,N)$ を行えば，右辺は $\langle\psi,\phi\rangle$ に等しいことがわかる．したがって，P_σ は内積を保存する．任意の $\psi\in L^2((\mathbb{R}^3)^N)$ と $\sigma\in\mathfrak{S}_N$ に対して，$\psi_\sigma(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_N):=\psi(\boldsymbol{x}_{\sigma^{-1}(1)},\cdots,\boldsymbol{x}_{\sigma^{-1}(N)})$ とおけば，$\psi_\sigma\in L^2((\mathbb{R}^3)^N)$ であって，$P_\sigma\psi_\sigma=\psi$ が成り立つ．したがって P_σ は全射である．よって，P_σ はユニタリである．任意の $\psi\in L^2((\mathbb{R}^3)^N)$ に対して $(P_\tau P_\sigma\psi)(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_N)=(P_\sigma\psi)(\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_N)$. ただし，$\boldsymbol{y}_j:=\boldsymbol{x}_{\tau(j)}$. 一方

$$\begin{aligned}(P_\sigma\psi)(\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_N)&=\psi(\boldsymbol{y}_{\sigma(1)},\cdots,\boldsymbol{y}_{\sigma(N)})\\&=\psi(\boldsymbol{x}_{\tau(\sigma(1))},\cdots,\boldsymbol{x}_{\tau(\sigma(N))})=(P_{\tau\sigma}\psi)(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_N).\end{aligned}$$

したがって，$P_\tau P_\sigma\psi=P_{\tau\sigma}\psi$.

8. 任意の $\tau\in\mathfrak{S}_N$ に対して

$$P_\tau\psi_+=\frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}P_\tau P_\sigma\psi=\frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}P_{\tau\sigma}\psi\quad(\text{問題 6}).$$

写像 $f_\tau:\mathfrak{S}_N\longrightarrow\mathfrak{S}_N$ を $f_\tau(\sigma)=\tau\sigma,\sigma\in\mathfrak{S}_N$ によって定義すると，これは全単射である．したがって，$(1/N!)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}P_{\tau\sigma}\psi=(1/N!)\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N}P_\rho\psi=\psi_+$. ゆえに $P_\tau\psi_+=\psi_+$. すなわち，ψ_+ は対称である．同様に $P_\tau\psi_-=\dfrac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)P_{\tau\sigma}\psi$. $\mathrm{sgn}(\tau\sigma)=\mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\sigma)$ と $\mathrm{sgn}(\tau)^2=1$ を使うと，$\mathrm{sgn}(\sigma)=\mathrm{sgn}(\tau\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$. したがって，$(1/N!)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)P_{\tau\sigma}\psi=(1/N!)\mathrm{sgn}(\tau)\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N}P_\rho\psi=\mathrm{sgn}(\tau)\psi_-$. ゆえに $P_\tau\psi_-=\mathrm{sgn}(\tau)\psi_-$. すなわち，$\psi_-$ は反対称である．

第8章

1. 任意の $\Psi \in D(\bar{H})$ に対して $\Psi_n \in D(H) = D(Q^2)$ で，$\Psi_n \longrightarrow \Psi, H\Psi_n \longrightarrow \bar{H}\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ を満たすものが存在する．したがって，$\{Q^2\Psi_n\}_n$ はコーシー列である．$\|Q\Psi_n - Q\Psi_m\|^2 = \langle \Psi_n - \Psi_m, Q^2\Psi_n - Q^2\Psi_m \rangle$ とシュヴァルツの不等式により，$\|Q\Psi_n - Q\Psi_m\|^2 \leq \|\Psi_n - \Psi_m\| \|Q^2\Psi_n - Q^2\Psi_m\| \longrightarrow 0$ $(n, m \longrightarrow \infty)$．したがって，$\{Q\Psi_n\}_n$ はコーシー列である．ゆえに $\eta := \lim_{n\to\infty} Q\Psi_n$ が存在する．この場合，閉包の定義により，$\Psi \in D(\bar{Q})$ かつ $\eta = \bar{Q}\Psi$．$\Phi_n = Q\Psi_n$ とおけば，$\Phi_n \longrightarrow \bar{Q}\Psi$ かつ $Q\Phi_n \longrightarrow \bar{H}\Psi$．したがって，$\bar{Q}\Psi \in D(\bar{Q})$ かつ $\bar{Q}^2\Psi = \bar{H}\Psi$．よって，$\bar{H} \subset \bar{Q}^2$．仮定により，$\bar{H}$ は自己共役であり，$\bar{Q}^2$ は対称作用素であるから，$\bar{H} = \bar{Q}^2$ でなければならない．

2. 任意の $\Psi \in D(\bar{A})$ に対して，$\Psi_n \longrightarrow \Psi, A\Psi_n \longrightarrow \bar{A}\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ を満たす $\Psi_n \in D(A)$ が存在する．仮定より，$AB\Psi_n = -BA\Psi_n$．B は有界であるから，$B\Psi_n \longrightarrow B\Psi, AB\Psi_n \longrightarrow -B\bar{A}\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$．これは，閉包の定義によって，$B\Psi \in D(\bar{A})$ かつ $\bar{A}B\Psi = -B\bar{A}\Psi$ を意味する．

3. $z \in \rho(-A)$ ($-A$ のレゾルヴェント集合) とすれば，$-A - z = -(A + z)$ は単射で $\mathrm{Ran}(-A - z) = \mathrm{Ran}(A + z)$ は稠密かつ $(-A - z)^{-1} = -(A + z)^{-1}$ は有界．これは，$-z \in \rho(A)$ を意味する．したがって，$\rho(-A) \subset \{z | -z \in \rho(A)\}$．いまの議論を逆に辿れば，逆の包含関係も示されるので，$\rho(-A) = \{z \in \mathbb{C} | -z \in \rho(A)\}$．したがって，$\sigma(-A) = \{z \in \mathbb{C} | -z \in \rho(A)\}^c = \{z \in \mathbb{C} | -z \in \sigma(A)\} = \{-z \in \mathbb{C} | z \in \sigma(A)\}$．

索 引

■あ■

新井 朝雄 (あらい あさお)
略歴
1954年 埼玉県に生まれる
1979年 東京大学大学院理学系研究科修士課程を修了
現在 北海道大学大学院理学研究院数学部門教授．理学博士．

著書に
『場の量子論と統計力学』(共著，日本評論社)，
『対称性の数理』(日本評論社)，
『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版)，
『量子力学の数学的構造I, II』(共著，朝倉書店)，
『フォック空間と量子場(上下)』(日本評論社)，
『多体系と量子場』(岩波書店)，
『物理現象の数学的諸原理』(共立出版)，
『現代物理数学ハンドブック』(朝倉書店)，
『現代ベクトル解析の原理と応用』(共立出版)，
『量子現象の数理』(朝倉書店)，
『複素解析とその応用』(共立出版)など．

ぶつり なか たいしょうせい げんだいすうりぶつりがく かんてん
物理の中の対称性—現代数理物理学の観点から

2008年1月20日 第1版第1刷発行

著 者 新井朝雄
発行者 林 克行
発行所 株式会社 日本評論社
〒170-8474 東京都豊島区南大塚3-12-4
電話 (03) 3987-8621 [販売]
(03) 3987-8599 [編集]
印 刷 藤原印刷
製 本 精光堂
装 釘 海保 透

ISBN 978-4-535-78466-6